

Eine frühe Form von Nikolaus von Kues' Schrift *De arithmetiis complementis*

Von Menso Folkerts, München

1. Einleitung

Die älteste erhaltene mathematische Schrift von Nikolaus von Kues ist die Abhandlung *De geometricis transmutationibus*, die er 1445 schrieb und seinem Studienkollegen und Freund Paolo Toscanelli (1397–1482) widmete. Cusanus erwähnt hier vier grundlegende Fragen. Die erste lautet: »Zu einer gegebenen geraden Linie ist eine gleichgroße gekrümmte anzugeben.«¹ Bei der Erörterung dieses Problems geht er von einem gleichseitigen Dreieck aus und gibt ein einfaches Verfahren an, um den Radius eines Kreises zu finden, der isoperimetrisch zu dem gegebenen Dreieck ist, d. h., denselben Umfang wie das Dreieck hat. Seine Begründungen für diese Vermutung sind mathematisch nicht exakt, aber im Ergebnis richtig.²

Kurz nach *De geometricis transmutationibus* entstand die kleine Schrift *De arithmetiis complementis*, die ebenfalls Toscanelli gewidmet ist und sich direkt auf die frühere Abhandlung bezieht. Cusanus versucht hier, aus den In- und Umkreisradien umfangsgleicher regelmäßiger Vielecke den Radius des Kreises zu bestimmen, der zu dem jeweiligen Polygon isoperimetrisch ist. Diese Schrift, die an manchen Stellen schwer verständlich ist, war nur aus Drucken des 16. Jahrhunderts bekannt.³

1 *De geom. transm.*: h XX, N. 6, Z. 1f.

2 Siehe MENSIO FOLKERTS, Die Quellen und die Bedeutung der mathematischen Werke des Nikolaus von Kues, in: MFCG 28 (2003) 291–332, hier: 310f.; NIKOLAUS VON KUES, Die mathematischen Schriften, übersetzt von Josepha Hofmann, mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hofmann (NvKdÜ 11), Leipzig/Hamburg 1952, Neuauflage 1979, XXII f.; MARCO BÖHLANDT, Verborgene Zahl – Verborgener Gott. Mathematik und Naturwissen im Denken des Nicolaus Cusanus (1401–1464), Stuttgart 2009, hier: 192–194.

3 Aus dem Pariser Druck von 1514 (p) und der darauf beruhenden Basler Ausgabe von 1565 (b). Neue Edition in h XX. Zum Inhalt siehe FOLKERTS (wie Anm. 2) 312f.; Hofmann (wie Anm. 2) XXVII f.; BÖHLANDT (wie Anm. 2) 207–214.

Bisher wusste man nicht, dass es noch eine zweite Fassung von *De arithmetiis complementis* gibt. Sie wird nur in der Handschrift 19–26 der Biblioteca Capitalar in Toledo (in Zukunft zitiert als: *To*) überliefert. Dieser Codex, der vor einigen Jahren von Klaus Reinhardt entdeckt wurde,⁴ ist deswegen besonders wichtig, weil sein Schreiber auf Material zurückgreifen konnte, das nicht in die von Cusanus selbst durchgesehenen Haupthandschriften Kues 218 und 219 aufgenommen wurde. So enthält *To* auch die Vorform von *De mathematica perfectione*, die ursprünglich im Codex Kues 218 stand, dort aber, vermutlich auf Cusanus' Veranlassung, durch Rasur getilgt wurde.⁵ *To* wurde vermutlich kurz nach 1461/62 in Italien von einem unbekanntem Schreiber aus dem Umkreis von Pier Leoni zusammengestellt.⁶ Die Handschrift gelangte aus der Bibliothek des Kardinals Francisco Xavier Zelada (1717–1801) um 1800 nach Toledo.⁷

Unter den zwölf Werken des Cusanus, die *To* enthält, befinden sich auch fünf seiner mathematischen Schriften.⁸ Im unmittelbaren Anschluss an *De geometricis transmutationibus* folgt auf f.175r–176r ein kurzer Text. Er trägt keine Überschrift, wird aber am Rand als 3^a *pars principalis totius operis* bezeichnet. Der Schreiber dieser Randbemerkung, der vermutlich nicht mit dem Schreiber des Haupttextes identisch ist, sah diesen Text also als dritten Teil von *De geometricis transmutationibus* an. Reinhardt glaubte, dies sei eine handschriftliche Fassung von Cusanus' Schrift *De arithmetiis complementis*, wie sie in den Ausgaben von 1514 und 1565 vorliegt.⁹ Dies trifft nicht zu: Der Text in *To* ist von dem gedruckten Text grundlegend verschieden, so dass es sich um eine andere, bisher unbekannte, Schrift handelt. Inhaltlich gibt es zwischen dem Text in *To* und dem Pariser Druck allerdings Zusammenhänge. Es wird sich zeigen, dass die Fassung in *To* eine Vorform des Textes von *De arithmetiis complementis* in den Drucken p und b präsentiert.

4 Siehe hierzu KLAUS REINHARDT, Eine bisher unbekannte Handschrift mit Werken des Nikolaus von Kues in der Kapitelsbibliothek von Toledo, in: MFCG 17 (1986) 96–141.

5 Siehe REINHARDT (wie Anm. 4) 125 f.

6 Siehe REINHARDT (wie Anm. 4) 130, 132 f.

7 Siehe REINHARDT (wie Anm. 4) 99 f.

8 Neben der Vorform zu *De mathematica perfectione* und der in dieser Arbeit vorgestellten Schrift noch *De geometricis transmutationibus*, *De mathematicis complementis* und *Dialogus de circuli quadratura*.

9 REINHARDT (wie Anm. 4) 122 f.

Die Handschrift *To* ist zwar sehr sauber geschrieben, aber von einem Schreiber, der den Inhalt in keiner Weise verstand. Er konnte offenbar nichts mit Brüchen anfangen und wusste nicht, was der Bruchstrich bedeutet. Daher hat er in seiner Abschrift von *De arithmetiis complementis* alle Stellen, an denen in seiner Vorlage Brüche standen, ausgelassen und durch Lücken ersetzt. Auch die Ziffern 2 und 5 hat der Schreiber nicht klar unterschieden. Es war jedoch möglich, die ausgelassenen Brüche aus dem Kontext zu erschließen und auch die übrigen Fehler, die bei den Zahlen vorkommen, zu korrigieren, so dass alle Rechnungen rekonstruiert werden konnten und alle Zahlenwerte mit den Rechnungen im Einklang stehen.

In der vorliegenden Arbeit werden der lateinische Text, eine deutsche Übersetzung und ein Kommentar zu dieser neu gefundenen Fassung präsentiert. Außerdem soll die Frage beantwortet werden, warum die Schrift in dieser Form nicht gedruckt wurde.¹⁰

In der kürzlich erschienenen Ausgabe der *Scripta mathematica* im Rahmen der Heidelberger Akademie-Ausgabe wurden auch die Vorformen von *De arithmetiis complementis* und von *De mathematica perfectione* kritisch ediert.¹¹ Daher konnte darauf verzichtet werden, an dieser Stelle die Abweichungen des lateinischen Textes von dem einzigen Textzeugen *To* zu vermerken.

2. Edition

[1] Postquam, mi Paule optime atque amatissime, ad consequentiam eorum, quae de geometricis transmutationibus sunt, cepisti habitudines hactenus ignotas, quantum numero attingibiles sciri conceduntur, complementa arithmetica, prout ingenium mihi natura ministravit, adieci. Consistunt autem illa in arte universali habitudinis dati chordae arcus ad

10 Der lateinische Text und die in diesem Aufsatz gegebene Interpretation wurden Marco Böhlandt zugänglich gemacht. Auf ihnen beruhen Böhlandts Ausführungen in: *Verborgene Zahl* (wie Anm. 2) 215–222.

11 h XX, S. 37–40 bzw. 183–199. In der lateinisch-französischen Ausgabe der mathematischen Schriften (NICOLAS DE CUES, *Les Écrits mathématiques. Présentation, traduction et notes* par Jean-Marie Nicolle, Paris 2007) sind beide Vorformen nicht wiedergegeben, obwohl die Vorform zu *De mathematica perfectione* schon 1986 von K. Reinhardt in Transkription vorgelegt worden ist.

diametrum. Nosti autem neminem ante haec tempora istam artem tradidisse, quamvis, ut fertur, Archimedes propinquam habitudinem diametri ad circumferentiam reliquerit, non tamen certam et quantum numero scibilis est, neque Ptolemaeus unius aut duorum aut quattuor et sic deinceps graduum veram chordam tradidit, sed verisimilem. Sed nunc, cum sciamus lineam, quae a centro circuli ad quartam partem lateris trigoni inscripti ducitur, fore quattuor quintas semidiametri circuli isoperimetri (ut in primo geometricarum transmutationum supposito declaratur), est nobis omnis scibilis habitudo diametri ad circumferentiam patefacta. Si enim ponitur diameter 60 graduum, manifestum est tres radices de $\frac{3}{4}$ fore latera trigoni inscripti et lineam a centro ad quartam partem lateris ductam radicem quartae partis de $\frac{7}{16}$. Unde radix $\frac{7}{64}$ cum quarta sui est tunc semidiameter circuli isoperimetri trigono. Sua est igitur habitudo semidiametri ad circumferentiam, quae est radices $\frac{7}{64}$ iuncta sibi quarta sui ad tres radices de $\frac{3}{4}$, uti haec nota sunt ex supposito allegato. Palam est quod si ponitur diameter 120 graduum iuxta positionem magni Ptolemaei, quod tunc semidiameter circuli isoperimetri trigono inscripto est 49 graduum 36 minutorum et prope 34 secundorum. Prope dico propter inattingibilem praecisionem surdae radices.

[2] Nunc artem inquirimus universalem ad habitudines chordarum et diametri. Scimus autem semidiametrum inscripti trigono fore medietatem circumscripti, scilicet gradus 30, si circumscripti ponitur prout chordae gradus 60. Unde differentia nota erit inscripti semidiametri ad semidiametrum isoperimetri, quia erit 19 gradus 36 minuta et prope 34 secunda. Scimus enim lineam de centro ad quartam partem lateris ductam radicem $\frac{7}{64}$, cuius radix est 39 gradus et prope 41 minuta. Sic differentia erit 9 gradus et quasi 56 minuta. Et sic utriusque simul 29 graduum et quasi 33 minutorum. Scimus etiam hanc differentiam esse maximam, ita quod in omnibus polygoniis isoperimetris in consimilibus tanto differentia illa minor erit, quanto polygonia capacior. Tanto autem polygonia capacior, quanto potentia lateris minor, quia quanto potentia minor, tanto plurium laterum et angulorum. Capacissimam autem scimus infinitorum angulorum et laterum in circulum resolutam. Oportet igitur has diversitates differentiarum ex varietate potentiarum laterum polygoniarum isoperimetrarum necessario exoriri. Sit igitur assertio, ex quo propositum sequetur, quod secundum habitudinem qua se habet potentia lateris polygoniae ad potentiam lateris trigoni se habere differentias, qua semidiameter inscripti cum

linea a centro ad quartam partem lateris ducta minores sunt diametro isoperimetri ad differentiam maximam. Ut si in hexagono est inquisitio, manifestum est potentiam lateris hexagoni esse quartam potentiae lateris trigoni isoperimetri, quia medietas eius. Erit igitur differentia, qua semidiameter inscripti hexagono cum linea de centro ad quartam partem lateris ducta minor est diametro isoperimetrae, quarta pars differentiae qua semidiameter inscripti trigono cum linea a centro ad quartam partem lateris trigoni ducta minor est diametro isoperimetri. Ideo si iungis simul semidiametrum inscripti trigono, quae est 30, et lineam ad quartam partem lateris ductam, quae est 39 graduum 41 minutorum, surgent 69 gradus et 41 minuta. Et si similiter iunxeris in hexagono illas, quae sunt 45 et iterum 46 et 50 minuta, surgent 91 gradus et 50 minuta, et differentia est 22 graduum 9 minutorum. Ideo si addideris ad 91 gradus et 50 minuta tertiam differentiae 22 graduum et 9 minutorum, quae est 7 gradus et 23 minuta, surget quaesitum, scilicet 99 gradus 13 minuta, quae sunt diameter circuli isoperimetri.

[3] Et hac via etiam, quae de circuli quadratura sciri possunt, arithmetice patescere conspicias. Praemissum autem patescet, quando attendis, quod sicut in capacioribus polygoniis semidiameter inscripti necessario plus accedit ad aequalitatem semidiametri circuli isoperimetri, quam secundum habitudinem potentiae lateris eius ad potentiam lateris trigoni accedere deberet, ita pariformiter linea illa ad quartam partem lateris ducta necessario plus accedit ad aequalitatem illius semidiametri inscripti quae coincidit cum semidiametro circuli isoperimetri. Et hoc necessarium vides, si attendis illa duo simul, scilicet secundum minorem potentiam lateris magis augeri semidiametrum inscripti et super ipsam minus addere lineam ad quartam partem lateris ductam. Unde evenit necessario, quando illae coniunguntur, habitudinem differentiarum sequi habitudines laterum.

[4] Cum igitur hoc sic attigisti, consequenter per notitiam potentiae lateris inquiris harum linearum, scilicet inscripti et eius quae a centro ad quartam partem lateris ducitur, differentiam. Nam potentia lineae ad quartam ductae maior est potentia semidiametri inscriptae tantum, quantum est potentia quartae partis lateris, ut de se est manifestum. Quare igitur duos numeros, quorum cum unus sic vincat alium, eorum radices simul iunctae efficiunt lineam minorem diametro isoperimetri secundum habitudinem differentiae praeinventae. Puta in hexagono subtracta dif-

ferentia, quae est 7 gradus et 23 minuta, de 99 gradibus et 13 minutis, quae sunt diameter isoperimetri, 91 gradus 50 minuta, quae sunt ut semidiameter inscripti hexagono cum linea a centro ad quartam partem lateris ducta. Inquirere vis divisionem huius in ipsis, scilicet semidiametrum et lineam sic ductam. Considera quadratum quartae partis lateris fore 169 et quod potentia lineae a centro ad quartam partem lineae ductae in tantum excedere deberet potentiam semidiametri inscripti et duos numeros recipis, scilicet 2025 et 2194, qui sic se habent, quorum radices sunt unius 45 gradus et alterius 46 gradus et quasi 50 minuta, qui simul iuncti efficiunt illa 91 gradus et 50 minuta. Et hinc habes intentum. Habita igitur semidiametro inscripti habetur semidiameter circumscripti, cuius quadratum addit super quadratum inscripti quadratum medietatis lateris polygoniae, quare habetur et diameter. Quae cum sit nota et latus polygoniae notum, erit habitudo chordae quaesitae ad diametrum circuli nota.

[5] Pari arte in omnibus si processeris, quaesitum assequeris. Quodque si ad scientiam chordae arcus unius gradus pervenire contendis, polygoniam 45 laterum recipito, scilicet radicem de 48. Quae cum sit latus, erit et chorda arcus 8 graduum. Et postquam via patefacta processeris, tibi chorda ista nota sit in habitudine ad diametrum, erit tibi nota chorda quattuor graduum, deinde duorum, deinde unius, deinde dimidii, et sic quaelibet alia descendendo vel ascendendo cuiuscumque arcus, qui sit pars aliquota circumferentiae.

[6] Manifesta erit tibi pariformiter habitudo arcus ad suam chordam, atque omne scibile circa triangulos sic patescet. Nam cum omnis triangulus sit orthogonius aut in orthogonios resolubilis, tunc ex scientia angulorum devenitur ex hic traditis ad scientiam habitudinum laterum, et ex notitia lateris unius ad notitiam omnium, atque ex his ad omne scibile in habitudinibus hactenus ignoratis, ut sic ars ista completa sit omnium per arithmeticam inquisibilium, qua forte certior atque perfectior nulla nobis a patribus exstat patefacta.

Finis.

3. Übersetzung

[1] Nachdem du, mein bester und geliebtester Paul, als Folge von dem, was die geometrischen Verwandlungen betrifft, die bisher noch nicht bekannten Verhältnisse verstanden hast, soweit man sie als durch die Zahl begreifbare (Größen) wissen kann, füge ich (jetzt) arithmetische Ergänzungen hinzu, soweit die Natur mir den Geist darreicht. Sie bestehen aber in einem allgemeinen Verfahren über das Verhältnis der Sehne eines gegebenen Bogens zum Durchmesser. Du weißt, dass keiner zuvor diese Lehre überliefert hat, obwohl Archimedes ein angenähertes Verhältnis des Durchmessers zum Umfang (des Kreises) hinterlassen hat, allerdings kein exaktes, wie man es mit Zahlen angeben kann; und auch Ptolemaeus hat nicht die exakte Sehne von 1, 2, 4 usw. Graden überliefert, sondern (nur) die wahrscheinliche. Weil wir nun aber wissen, dass die Strecke, die vom Kreismittelpunkt zum vierten Teil einer Seite des einbeschriebenen Dreiecks gezogen wird, vier Fünftel des Radius des (zum Dreieck) isoperimetrischen Kreises beträgt (dies wird nämlich in der ersten Prämisse der Schrift über die geometrischen Verwandlungen gezeigt), ist für uns jedes wissbare Verhältnis des Durchmessers zum Umfang offenkundig. Wenn nämlich der Durchmesser 60 Grad gesetzt wird, sind die (drei) Seiten des einbeschriebenen Dreiecks offenbar $3 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$, und die vom Mittelpunkt zum vierten Teil der Seite gezogene Strecke hat die Länge $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16}}$. Somit ist $\sqrt{\frac{7}{64}}$ plus $\frac{1}{4}$ davon gleich dem Radius des zum Dreieck isoperimetrischen Kreises. Es ist also das Verhältnis des (Halb-)Messers zum Umfang (des Dreiecks), d. h. von $\sqrt{\frac{7}{64}}$ plus ein Viertel davon zu $3 \sqrt{\frac{3}{4}}$, wie es sich aus der genannten Prämisse ergibt. Es ist offenkundig, dass, wenn der Durchmesser als 120° angenommen wird nach dem Ansatz des großen Ptolemaeus, dann der Radius des zum einbeschriebenen Dreieck isoperimetrischen Kreises $49^\circ 36'$ und ungefähr $34''$ ist. Ich sage »ungefähr«, weil eine irrationale Wurzel nicht exakt angegeben werden kann.

[2] Nun suchen wir ein allgemeines Verfahren für die Verhältnisse zwischen den Sehnen und dem Durchmesser. Wir wissen, dass der Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises die Hälfte (des Radius) des umbeschriebenen Kreises ist, nämlich 30° , wenn der Radius des umbeschriebenen Kreises wie der einer Sehne von 60° gesetzt wird. Daher ist die Differenz des Radius des einbeschriebenen (Kreises) zum Radius des (zum Dreieck) isoperimetrischen (Kreises) bekannt, nämlich $19^\circ 36'$ und

etwa $34''$. Wir wissen, dass die Strecke vom Mittelpunkt zum vierten Teil der Seite $\sqrt{\frac{7}{64}}$ ist, und diese Wurzel ist 39° und etwa $41'$. Somit ist die Differenz 9° und etwa $56'$. Und so ist die Summe von beiden (Werten) 90° und etwa $33'$. Wir wissen auch, dass diese Differenz die größte ist, so dass in allen gleichartigen [d. h. regelmäßigen] isoperimetrischen Vielecken jene Differenz desto kleiner ist, je größer der Inhalt des Vielecks ist. Der Inhalt des Vielecks ist aber umso größer, je kleiner das Quadrat der Seite ist, weil, je kleiner das Quadrat ist, umso mehr Seiten und Winkel (das Vieleck besitzt). Wir wissen aber, dass den größten Inhalt ein Vieleck von unendlich vielen Winkeln und Seiten besitzt, das in einen Kreis überführt worden ist. Es müssen sich also diese Unterschiede in den Differenzen notwendigerweise aus dem Unterschied der Quadrate der Seiten der isoperimetrischen Vielecke ergeben. Es gelte also folgende Annahme, aus der der Satz folgen wird: das Verhältnis des Quadrats einer Vielecksseite zum Quadrat der Dreiecksseite ist ebenso groß wie das Verhältnis der Differenz zwischen dem Durchmesser des isoperimetrischen Kreises und (der Summe) des Radius des einbeschriebenen Kreises und der Strecke vom Kreismittelpunkt zum vierten Teil der Seite zur größten Differenz. Wenn man z. B. seine Untersuchung am Sechseck anstellt, so ist offenbar das Quadrat der Seite des Sechsecks ein Viertel des Quadrats der Seite des isoperimetrischen Dreiecks, weil (die Seite des Sechsecks) die Hälfte (der Seite des Dreiecks) beträgt. Die Differenz, um die der Radius des dem Sechseck einbeschriebenen Kreises, vermehrt um die Strecke vom Kreismittelpunkt zum vierten Teil der Seite (des Sechsecks), kleiner ist als der Durchmesser des isoperimetrischen Kreises, beträgt also ein Viertel der Differenz, um die der Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises, vermehrt um die Strecke vom Kreismittelpunkt zum vierten Teil der Seite des Dreiecks, kleiner ist als der Durchmesser des isoperimetrischen Kreises. Wenn du nun den Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises, nämlich 30 , und die Strecke (vom Mittelpunkt) zum vierten Teil der Seite zusammenfügst, nämlich $39^\circ 41'$, so ergeben sich $69^\circ 41'$. Und wenn du entsprechend jene Strecken im Sechseck zusammenfügst, nämlich 45° und $46^\circ 50'$, so ergeben sich $91^\circ 50'$. Die Differenz (davon) ist $22^\circ 9'$. Und wenn du zu $91^\circ 50'$ ein Drittel der Differenz $22^\circ 9'$, nämlich $7^\circ 23'$, hinzufügst, so wird sich das Gesuchte ergeben, nämlich $99^\circ 13'$, und dies ist der Durchmesser des isoperimetrischen Kreises.

[3] Und du siehst, dass auf diesem Wege das, was man über die Kreisquadratur wissen kann, auch arithmetisch offenbar wird. Die Prämisse zeigt, dass ebenso, wie in Vielecken mit größerem Inhalt der Radius des einbeschriebenen (Kreises) sich notwendigerweise mehr dem Radius des isoperimetrischen Kreises annähert, als er sich gemäß dem Verhältnis des Quadrats seiner Seite zum Quadrat der Seite des Dreiecks annähern müsste, auch in gleicher Weise sich jene Strecke, die zum vierten Teil der Seite gezogen wird, notwendigerweise mehr dem Radius des einbeschriebenen Kreises annähert, der mit dem Radius des isoperimetrischen Kreises zusammenfällt. Und dies siehst du notwendigerweise, wenn du jene beiden Dinge gleichzeitig betrachtest, nämlich, dass, gemäß dem kleineren Quadrat der Seite, der Radius des einbeschriebenen (Kreises) stärker vergrößert wird, und dass die Strecke, die zum vierten Teil der Seite gezogen wird, zu ihr weniger hinzufügt. So geschieht notwendig, dass, wenn jene zusammengenommen werden, das Verhältnis der Differenzen den Verhältnissen der Seiten folgt.

[4] Wenn du dies so erfasst hast, kannst du folgerichtig aus der Kenntnis des Quadrats der Seite die Differenz dieser Strecken erkennen, nämlich (die Differenz des Radius) des einbeschriebenen (Kreises) und der Strecke, die vom Mittelpunkt zum vierten Teil der Seite gezogen wird. Denn das Quadrat der zum vierten Teil (der Seite) gezogenen Strecke ist um so viel größer als das Quadrat des Radius des einbeschriebenen (Kreises), wie das Quadrat des vierten Teils der Seite ist: dies ist von sich aus klar. Suche also zwei Zahlen, von denen die eine die andere so übertrifft, dass ihre Wurzeln zusammengenommen eine Strecke bilden, die gemäß dem Verhältnis der zuvor gefundenen Differenz kleiner ist als der Durchmesser des isoperimetrischen (Kreises). Wenn z. B. im Sechseck die Differenz, nämlich $7^{\circ} 23'$, von $99^{\circ} 13'$, nämlich dem Durchmesser des isoperimetrischen Kreises, abgezogen wird, (ergibt sich) $91^{\circ} 50'$, und dies ist der Durchmesser des dem Sechseck einbeschriebenen Kreises zusammen mit der Strecke, die vom Mittelpunkt zum vierten Teil der Seite gezogen wird. Du möchtest die Einteilung dieser Strecke in seine Teile, nämlich in den Radius und die so gezogene Strecke, herausfinden. Bedenke, dass das Quadrat (der Strecke zum) vierten Teil der Seite 169 ist und dass das Quadrat der Strecke, die vom Mittelpunkt zum vierten Teil der Seite gezogen ist, um so viel das Quadrat des Radius des einbeschriebenen (Kreises) übertreffen muss, und du erhältst zwei Zahlen, nämlich 2025

und 2194, die sich so verhalten; die Wurzel der einen ist 45° und die der anderen 46° und etwa $50'$; zusammen ergeben sie $91^\circ 50'$. Und so hast du das, was du beabsichtigtest. Wenn also der Radius des einbeschriebenen (Kreises) bekannt ist, ist auch der Radius des umbeschriebenen (Kreises) bekannt; sein Quadrat fügt zum Quadrat des einbeschriebenen (Kreises) das Quadrat über der halben Seite des Vielecks hinzu; daher ist auch der Durchmesser bekannt. Weil der Durchmesser bekannt ist und die Seite des Vielecks bekannt ist, ist auch das Verhältnis der gesuchten Sehne zum Durchmesser des Kreises bekannt.

[5] Wenn du auf gleiche Weise bei allen (Vielecken) vorgehst, so erreichst du das, was du gesucht hast. Wenn du nun zum Wissen über die Sehne des Bogens von 1° gelangen willst, so gehe von einem Vieleck von 45 Seiten aus. Seine Seite ist $\sqrt{48}$. Weil dies die Seite ist, ist es auch die Sehne des Bogens von 8° . Und wenn du, nachdem der Weg geöffnet ist, weitergehst und dir diese Sehne im Verhältnis zum Durchmesser bekannt ist, wird dir auch die Sehne von 4° , von 2° , von 1° , von $\frac{1}{2}^\circ$ bekannt sein und ebenso jede beliebige andere, indem du ab- oder aufsteigst, zu jedem Bogen, der ein aliquoter Teil des Umfangs ist.

[6] In gleicher Weise wird dir auch das Verhältnis eines Bogens zur zugehörigen Sehne klar sein, und alles, was man über die Dreiecke wissen kann, liegt so offen dar. Denn weil jedes Dreieck entweder rechtwinklig ist oder in rechtwinklige zerlegt werden kann, gelangt man von der Wissenschaft über die Winkel von den hier niedergelegten (Dingen) zur Wissenschaft über die Verhältnisse der Seiten und von der Kenntnis einer Seite zur Kenntnis aller (Seiten) und von diesen Dingen zu allem, was man über die bisher unbekanntenen Verhältnisse wissen kann. So ist dieses Verfahren vollständig für all das, was man mit Hilfe der Arithmetik erforschen kann; es gibt nichts, was uns von unseren Vorfahren eröffnet worden ist, das gewisser und vollkommener als diese ist.

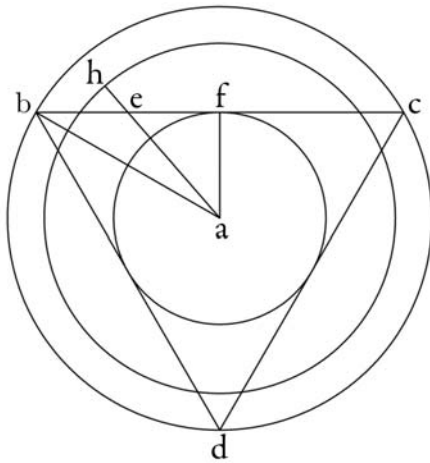
Ende.

4. Kommentar

[1] Cusanus wendet sich an Paulus Toscanelli. Dieser hat im Anschluss an Cusanus' Ausführungen in *De geometricis transmutationibus* die Frage nach den Verhältnissen (*habitudines*) gestellt, die sich bei den dort durchgeführten Konstruktionen ergeben, soweit diese überhaupt durch eine Zahl darstellbar sind (*quantum numero attingibiles sciri conceduntur*). Diese Frage möchte Cusanus, soweit es ihm möglich ist, beantworten. Diese »arithmetischen Ergänzungen« (*complementa arithmetica*) bestehen darin, ein allgemeines Verfahren anzugeben, um das Verhältnis einer Sehne (über einem gegebenen Bogen) zum Kreisdurchmesser numerisch zu bestimmen. Cusanus behauptet, niemand habe vor ihm ein solches Verfahren angegeben, obwohl von Archimedes ein Näherungswert für das Verhältnis des Durchmessers zum Kreisumfang überliefert sei und obwohl Ptolemaeus die Werte der Sehnen zu den Mittelpunktswinkeln 1° , 2° , 4° usw. näherungsweise (*neque ... veram cordam ..., sed verisimilem*) bestimmt habe. Cusanus bezieht sich bei Archimedes auf Satz 3 seiner *Kreismessung*, die seit dem 12. Jahrhundert durch Übersetzungen aus dem Arabischen und durch darauf beruhende Bearbeitungen allgemein bekannt war. Daher wusste man, dass nach Archimedes das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser, also unsere Zahl π , zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$ liegt. Die Erwähnung des Ptolemaeus zeigt, dass Cusanus zumindest wusste, dass Ptolemaeus Werte der Sehnen zu den Bögen 1° , 2° , 4° usw. überliefert. Diese Werte (und auch alle anderen Sehnen zu den Bögen von $\frac{1}{2}^\circ$ bis 180° mit einer Schrittweite von $30'$, angegeben auf 3 Stellen im Sexagesimalsystem, also auf Grad, Minuten und Sekunden, und bezogen auf den Kreisdurchmesser von 120°) findet man in Kapitel I.11 des *Almagest*; sein Verfahren zur Berechnung der Sehnentafel gibt Ptolemaeus in I.10 an.¹² Woher Cusanus sein Wissen über Ptolemaeus hatte, ist nicht bekannt; vielleicht war ihm eine Handschrift der Übersetzung des Gerhard von Cremona zugänglich, der im 12. Jahrhundert den *Almagest* aus dem Arabischen übersetzt hatte. Es ist eher unwahrscheinlich, dass Cusanus das komplizierte Verfahren kannte, mit dem Ptolemaeus den Wert der Sehne zum Bogen 1° bestimmt hat.

12 Siehe PTOLEMÄUS, Handbuch der Astronomie. Band I. Deutsche Übersetzung und erläuternde Anmerkungen von Karl Manitius. Vorwort und Berichtigungen von Otto Neugebauer, Leipzig 1963, 24–40.

Die Rechnung, die Cusanus im folgenden präsentiert, beruht auf der 1. Prämisse (*suppositum*) am Ende seiner Schrift *De geometricis transmutationibus*. Diese Prämisse gibt das folgende Verfahren an, um den Radius des Kreises zu finden, der zu dem in einen gegebenen Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck isoperimetrisch ist (siehe Figur):¹³



Man beschreibe in einen gegebenen Kreis mit dem Durchmesser D das gleichseitige Dreieck bcd und bestimme e auf bc so, dass $be = \frac{1}{4} bc$ ist. Man verlängere ae über e hinaus bis zum Punkt h , so dass $eh = \frac{1}{4} ae$ ist. Dann ist ah der Radius des zum Dreieck bcd isoperimetrischen Kreises.

Hieraus kann man leicht die Strecke $ae = x_3$ und somit auch den Radius r_i des zum Dreieck isoperimetrischen Kreises berechnen, da $r_i = \frac{5}{4} ae$ ist. In der Handschrift fehlen

die entsprechenden Brüche, für die Platz freigelassen ist; sie sind im folgenden ergänzt. Die Zwischenrechnungen hat Cusanus nicht angegeben.

Ist D der Durchmesser des dem Dreieck umschriebenen Kreises, so gilt:

$ab = \frac{1}{2} D$, $af = r_3 = \frac{1}{4} D$, $bf = \frac{1}{4} D \sqrt{3}$, $ef = \frac{1}{8} D \sqrt{3}$, $bc = s_3 = 2bf = D \sqrt{\frac{3}{4}}$.
Somit gilt für den Umfang des Dreiecks: $U_3 = 3s_3 = 3D \sqrt{\frac{3}{4}}$. Diesen Wert nennt Cusanus.

Die Strecke $ae = x_3$ lässt sich nach dem Satz des Pythagoras bestimmen:

$$ae^2 = af^2 + ef^2 = \frac{1}{16} D^2 + \frac{3}{64} D^2 = \frac{7}{64} D^2,$$

also $ae = \sqrt{\frac{7}{64}} D$. Auch diesen Wert nennt Cusanus. Hieraus folgt für den Radius r_i des zum Dreieck isoperimetrischen Kreises:

$$r_i = ah = \frac{5}{4} ae = \frac{5}{4} D \sqrt{\frac{7}{64}} \tag{I}$$

und

$$r_i : U_3 = \frac{5}{4} D \sqrt{\frac{7}{64}} : 3D \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{7}{64}} : 3 \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Dieses Verhältnis gibt Cusanus an.

13 Siehe h XX, N. 9–10.

Danach nennt Cusanus den numerischen Wert für r_i im Sexagesimalsystem, bezogen auf den Durchmesser $D = 120^\circ$ des Ausgangskreises. Diesen Durchmesser hat, wie Cusanus korrekt erwähnt, Ptolemaeus für seine Sehntafel zugrunde gelegt. Der Wert, den Cusanus angibt, folgt tatsächlich aus (1):

$$r_i = \frac{5}{32} \cdot 120^\circ \cdot \sqrt{7} = 49^\circ 36' 34''.$$

Cusanus betont zu Recht, dass der Wert der zweiten Sexagesimalstelle, $34''$, nur genähert ist, weil eine irrationale (*surdus*) Quadratwurzel nicht genau angegeben (*inattigibilis*) werden kann.

[2] Im folgenden Abschnitt verspricht Cusanus ein allgemein gültiges Verfahren (*ars universalis*), um das Verhältnis zwischen Sehnen und Durchmesser (des zu einem Polygon isoperimetrischen Kreises) zu bestimmen. Ähnlich wie in *De geometricis transmutationibus*, geht er vom einbeschriebenen Dreieck zum dazu isoperimetrischen Sechseck über und kommt schließlich zu Aussagen über das isoperimetrische n -Eck. Er beginnt wieder mit dem in einen Kreis mit gegebenem Durchmesser $D = 120^\circ$ einbeschriebenen regulären Dreieck. Sei r_3 der Radius des ihm einbeschriebenen und R_3 der Radius des ihm umbeschriebenen Kreises. Dann gilt offenbar $r_3 = \frac{1}{2} R_3$ und somit $r_3 = 30^\circ$, wenn $R_3 = 60^\circ$ ist. Weiterhin gilt:

$$r_i - r_3 = 49^\circ 36' 34'' - 30^\circ = 19^\circ 36' 34''$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{7}{64}} \cdot 120^\circ = \frac{4}{5} \cdot 49^\circ 36' 34'' = 39^\circ 41'.$$

Somit ist

$$r_i - x_3 = 49^\circ 36' 34'' - 39^\circ 41' = 9^\circ 56'$$

und

$$(r_i - r_3) + (r_i - x_3) = 19^\circ 36' 34'' + 9^\circ 56' = 29^\circ 33'.$$

Cusanus fügt überall *prope* oder *quasi* hinzu, um anzudeuten, dass es sich nicht um exakte Werte handelt. Die letzte Zahl, $29^\circ 33'$, wird übrigens für die weitere Rechnung nicht benötigt.

Cusanus betont zu Recht, dass die Differenz $r_i - x_n$ unter allen isoperimetrischen Vielecken beim Dreieck am größten ist und dass diese Differenz umso kleiner ist, je größer der Inhalt des Vielecks ist; je größer sein Inhalt ist, desto kleiner ist das Quadrat (*potentia*) über seiner Seite; je kleiner das Quadrat über der Seite ist, desto mehr Seiten und Winkel hat das Vieleck; den größten Inhalt unter den isoperimetrischen Figuren hat der Kreis, der ja unendlich viele Winkel und Seiten hat.

Cusanus folgert aus diesen Tatsachen, dass der Unterschied der Differenzen (gemeint ist $r_i - x_n$) offenbar durch den Unterschied der Quadrate der Vielecksseiten hervorgerufen wird (*ex varietate potentiarum laterum polygoniarum isoperimetrarum necessario exoriri*). Hieraus folgert er eine Annahme (*assertio*), die er umständlich in Worten formuliert; aus ihr wird alles Weitere folgen. Modern geschrieben, besagt sie für das regelmäßige n -Eck:

$$\frac{s_n^2}{s_3^2} = \frac{d_i - (r_n + x_n)}{d_i - (r_3 + x_3)}. \quad (2)$$

Dabei bezeichnet s_n die Seite des n -Ecks, r_n den Radius seines Inkreises, x_n (wie beim Dreieck) die Strecke vom Kreismittelpunkt bis zu dem Punkt auf s_n , der $\frac{1}{4} s_n$ vom Eckpunkt des Polygons entfernt ist, und d_i den Durchmesser des zum Dreieck (und zum n -Eck) isoperimetrischen Kreises.

Cusanus geht dann auf das zum Dreieck isoperimetrische Sechseck ein. Für dessen Umfang U_6 und Seite s_6 gilt:

$U_6 = U_3 = 3D \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$, also $s_6 = \frac{1}{6} U_6 = \frac{1}{4} D \cdot \sqrt{3}$. Im weiteren Verlauf benutzt er die Werte $r_6 = 45^\circ$ und $x_6 = 46^\circ 50'$, ohne anzugeben, wie er zu ihnen gekommen ist. Vermutlich hat er folgendermaßen gerechnet:

r_6 lässt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras finden:

$$r_6^2 = \left(\frac{D}{4} \sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{D}{8} \sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{16} D^2 - \frac{3}{64} D^2 = \frac{9}{64} D^2,$$

also $r_6 = \frac{3}{8} D = \frac{3}{8} \cdot 120^\circ = 45^\circ$.

Analog lässt sich x_6 bestimmen:

$$x_6^2 = \left(\frac{s_6}{4}\right)^2 + r_6^2 = \left(\frac{1}{16} D \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{8} D\right)^2 = \frac{39}{256} D^2,$$

also $x_6 = \frac{1}{16} D \cdot \sqrt{39} = \frac{120^\circ}{16} \sqrt{39} = \frac{120^\circ \cdot 6,2449980}{16} = 46^\circ 50'$.

Mit Hilfe dieser Werte s_6 , r_6 , x_6 und der schon bekannten Werte für s_3 , r_3 , x_3 lässt sich jetzt d_i aus (2) berechnen. Aus (2) folgt:

$$\frac{1}{4} = \frac{d_i - (45^\circ + 46^\circ 50')}{d_i - (30^\circ + 39^\circ 41')} = \frac{d_i - 91^\circ 50'}{d_i - 69^\circ 41'}.$$

Cusanus rechnet folgendermaßen weiter:

$$\begin{aligned}
 4d_i - 4 \cdot 91^\circ 50' &= d_i - 69^\circ 41' \\
 3d_i &= 4 \cdot 91^\circ 50' - 69^\circ 41' \\
 3d_i &= 3 \cdot 91^\circ 50' + (91^\circ 50' - 69^\circ 41') \\
 d_i &= 91^\circ 50' + \frac{1}{3} \cdot (22^\circ 9') \\
 d_i &= 91^\circ 50' + 7^\circ 23' \\
 d_i &= 99^\circ 13'.
 \end{aligned}$$

Cusanus wird bemerkt haben, dass dieser Wert für d_i zu dem Wert $r_i = 49^\circ 36' 34''$ passt, den er am Ende von [I] berechnet hatte; er äußert sich aber nicht dazu. Die Annahme liegt nahe, dass die Identität der beiden Werte Cusanus darin bestärkt hat, dass sein Ansatz (2) korrekt ist.

[3] Cusanus erwähnt, dass man auf die von ihm dargelegte Weise alles, was man über die Kreisquadratur wissen kann, auch mit Hilfe der Arithmetik darstellen kann. Er bezieht sich hierbei auf die erste Prämisse von *De geometricis transmutationibus*. Die folgenden allgemeinen Ausführungen sind nicht sehr klar. Cusanus stellt fest, dass bei wachsendem n sich r_n stärker an r_i annähert als dies entsprechend dem Verhältnis von $s_n^2 : s_3^2$ sein müsste und dass ähnliches auch für die Annäherung von x_n an r_i gilt. Er folgert dies daraus, dass sich (bei sich vergrößerndem n) s_n^2 verkleinert und gleichzeitig r_n sich vergrößert und x_n weniger zu r_n hinzufügt. Hieraus ergibt sich nach Cusanus zwangsläufig, dass das Verhältnis der Differenzen, also der rechte Term von (2), dem Verhältnis der Seiten entspricht.

[4] Man kann, wie Cusanus betont, aus der Kenntnis des Quadrats der Seite s_n des n -Ecks die Differenz $r_n - x_n$ ermitteln. Es gilt nämlich (nach dem Satz des Pythagoras) offenkundig die Beziehung $x_n^2 = r_n^2 + (\frac{s_n}{4})^2$.¹⁴ Cusanus versucht seine Ansicht an den Zahlenwerten des Sechsecks zu verdeutlichen, das er in [2] behandelt hatte. Er subtrahiert von $d_i = 99^\circ 13'$ den Wert $7^\circ 23'$ und erhält $91^\circ 50'$ für die Summe $r_6 + x_6$. Um r_6 und x_6 zu erhalten, geht er von der Beziehung $x_6^2 = r_6^2 + (\frac{s_6}{4})^2$ aus. Für die Seite des Sechsecks gilt: $s_6 = \frac{1}{4} D \sqrt{3} = 30 \sqrt{3}$. Es gilt: $\frac{s_6}{4} = 7 \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$; $(7 \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})^2 \approx 169$. Es muss also x_6^2 um 169 größer sein als r_6^2 . Zwei Zahlen mit dieser Eigenschaft sind $r_6^2 = 2025$ und $x_6^2 = 2194$; ihre Wurzeln sind $r_6 = 45^\circ$ und $x_6 = 46^\circ 50'$; deren Summe ist $r_6 + x_6 = 91^\circ 50'$, also der Ausgangswert.

14 Hieraus folgt nur, dass man aus s_n die Differenz der Quadrate $x_n^2 - r_n^2$ finden kann; es folgt aber nicht, dass man auch die Differenz $x_n - r_n$ finden kann.

Cusanus schließt diesen Abschnitt mit der richtigen Bemerkung, dass man aus dem Radius r_n des einbeschriebenen Kreises den Radius R_n des umbeschriebenen Kreises berechnen kann, da R_n , r_n und $\frac{s_n}{2}$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden; und wenn R_n und s_n bekannt sind, ist auch das Verhältnis der gesuchten Sehne zum Durchmesser des Kreises bekannt.

[5] Cusanus ist aus seiner Sicht jetzt in der Lage, die Sehne zum Bogen von 1° zu bestimmen. Hierzu betrachtet er ein regelmäßiges Vieleck mit 45 Seiten, das isoperimetrisch zum Ausgangsdreieck ist. Da $U_{45} = U_3 = \frac{3}{2} D \sqrt{3}$ ist, folgt für die Seite des 45-Ecks:

$$s_{45} = \frac{1}{45} \cdot U_{45} = \frac{1}{30} D \sqrt{3} = 4 \sqrt{3} = 4 \cdot 1,7320508\dots \approx \sqrt{48} .$$

Cusanus führt die Rechnung nicht aus, sondern gibt nur das Ergebnis. Das 45-Eck hat den Mittelpunktswinkel $\frac{360^\circ}{45} = 8^\circ$. Somit ist (gemäß Cusanus) die Sehne von 8° bekannt. Hieraus kann man leicht die Sehnen von 4° , 2° , 1° , $\frac{1}{2}^\circ$ usw. bestimmen, also die zu einem beliebigen Bruchteil des Umfangs gehörige Sehne.

[6] Hiermit ist Cusanus am Ziel angekommen: Er kann die Sehne zu einem beliebigen Winkel angeben und auch das Verhältnis eines beliebigen Bogens zur Sehne. Von der Betrachtung der Winkel kommt er auch zu Aussagen über die Seiten; er begründet dies damit, dass jedes Dreieck entweder rechtwinklig ist oder in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt werden kann. Somit liegt alles klar da, was mit den Mitteln der Arithmetik überhaupt behandelt werden kann.

5. Einschätzung

Die hier behandelte Fassung von *De arithmetiis complementis* – im folgenden »Vorform« genannt – schließt sich eng an Cusanus' erste erhaltene mathematische Schrift *De geometricis transmutationibus* an. Seine Absicht ist es, das in *De geometricis transmutationibus* dargelegte geometrische Verfahren zur Konstruktion des isoperimetrischen Kreises arithmetisch zu untersuchen. Anders, als bei den übrigen erhaltenen mathematischen Schriften, stehen hier nicht geometrische Betrachtungen, sondern Rechnungen im Mittelpunkt. Cusanus glaubt, dass es dadurch auch möglich wird, die zu einem beliebigen Winkel im Kreis gehörige Sehne zu berechnen. Er misst sich dabei mit Ptolemaeus, der diese Frage

behandelt hat, aber, wie Cusanus zu Unrecht meint, zu keinen korrekten Werten gekommen ist.

Ausgangspunkt ist der Satz über die Bestimmung des Radius des Kreises, der zu einem gegebenen gleichseitigen Dreieck isoperimetrisch ist. Dieser Satz, der am Ende der vorausgehenden Abhandlung als *primum suppositum* formuliert wurde, liefert keinen genauen Wert, sondern nur eine Näherung; insbesondere ist die Annahme, dass die Strecke vom Mittelpunkt zur Dreiecksseite diese im Verhältnis 1 : 4 teilt, nicht mathematisch stringent, sondern es handelt sich um einen rein intuitiv gefundenen Näherungsansatz.¹⁵ Dadurch, dass die Vorform von einer mathematisch nicht zutreffenden Voraussetzung ausgeht, können die Rechnungen nicht zu genauen, sondern bestenfalls zu angenäherten Ergebnissen führen.

Mit Hilfe der 1. Prämisse aus *De geometricis transmutationibus* gelingt es Cusanus, den Radius des zu einem gleichseitigen Dreieck isoperimetrischen Kreises zu berechnen. Dies geschieht im Abschnitt 1. Danach formuliert er umständlich in Worten eine Annahme (*assertio*), die bestimmte Stücke im gleichseitigen Dreieck mit den entsprechenden Stücken in dazu isoperimetrischen Polygonen höherer Seitenzahl und mit dem Durchmesser des isoperimetrischen Kreises in Verbindung setzt; dies ist die Beziehung (2). Sie wird nicht bewiesen, sondern nur durch qualitative Aussagen gestützt. Cusanus wendet sie zunächst auf das Sechseck an und berechnet mit ihrer Hilfe in Abschnitt 2 den Durchmesser des isoperimetrischen Kreises. Seine Ausführungen sind teilweise dunkel und mathematisch unzulänglich.

Cusanus geht stillschweigend davon aus, dass die Aussage (2) für ein beliebiges isoperimetrisches n -Eck gilt. Indem er $n = 45$ wählt, kann er hieraus die Seite des 45-Ecks berechnen, d. h. die Sehne, die zum Mittelpunktswinkel 8° gehört. Es ist ihm bekannt, dass man hieraus durch wiederholtes Halbieren die Sehne von 1° und somit jede ganzzahlige Sehne finden kann. Die diesbezüglichen Rechnungen führt er jedoch nicht aus.

Jetzt sieht sich Cusanus am Ziel: Er hat nach seiner Ansicht ein Problem gelöst, an dem sich viele Gelehrte erfolglos versucht haben. Offenbar hat er Ptolemaeus' *Almagest* nicht genau studiert, denn sonst hätte er bemerkt, dass Ptolemaeus auf mathematisch korrekte Weise die Sehne

15 Siehe Hofmann, Mathematische Schriften (wie Anm. 2) XXIII.

zum Winkel 1° berechnet hat: Ausgehend vom Fünf- und Sechseck, hat dieser die Sehnen zu den Winkeln 72° und 60° bestimmt, daraus die Sehne der Differenz $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$ und daraus durch Halbieren die Sehnen von 6° , 3° und $1\frac{1}{2}^\circ$. Um zur Sehne von 1° zu gelangen, benutzte Ptolemaeus geschickte Interpolationen; mit elementargeometrischen Mitteln ist die Berechnung der Sehne von 1° nicht möglich.

Um die Güte der cusanischen Näherung für die Sehne von 8° zu erkennen, genügt es, seinen Wert, den des Ptolemaeus und den korrekten Wert nebeneinander zu stellen. Auf 5 Stellen gerundet, erhält man in dezimaler Darstellung:

Nikolaus von Kues: $\sqrt{45} = 6,92820$

Ptolemaeus¹⁶: $8^\circ 22' 15'' = 8,37083$.

Der genaue Wert beträgt: $\text{crd } 8^\circ = D \cdot \sin 4^\circ = 8,37078$. Die Näherung von Ptolemaeus ist also sehr gut, während Cusanus' Wert sehr ungenau ist: sein Fehler beträgt über 17%.

Bei dem hier vorgelegten Text haben wir es tatsächlich mit einem Entwurf einer arithmetischen Ergänzung zu *De geometricis transmutationibus* zu tun. Alles deutet darauf hin, dass Cusanus mit dieser Schrift die geometrischen Ausführungen seiner früheren Abhandlung arithmetisch untermauern wollte. Der Text von *De arithmetis complementis*, der später gedruckt wurde, weicht jedoch grundlegend von dieser Vorform ab: anders als diese, enthält er kaum Rechnungen und ist recht allgemein gehalten. Wir können über die Gründe dieser Umgestaltung nur Vermutungen anstellen. Aus dem einleitenden Satz wissen wir, dass Cusanus seinen Entwurf an Toscanelli schickte. Die Annahme liegt nahe, dass dieser ihn auf Umzulänglichkeiten hinwies¹⁷ und dass Cusanus daraufhin den Entwurf stark überarbeitete, wobei er die arithmetischen Details fortließ.

Cusanus hat offenbar zeitlebens nicht begriffen, dass es ihm in Wirklichkeit nicht gelungen ist, die Sehne zu einem beliebigen Mittelpunktswinkel zu berechnen. Denn auch in der gedruckten Fassung von *De arithmetis complementis* finden wir die Formulierung, die Alten hätten trotz des größten darauf verwendeten Eifers es nicht erreichen können, alle Sehnen zu bestimmen; er – Cusanus – habe dieses Problem aber

16 PTOLEMÄUS, Handbuch (wie Anm. 12) 37.

17 Auch die *Complementa mathematica* hat Cusanus auf Toscanellis Anraten umgearbeitet.

gelöst.¹⁸ Auch viele Jahre später, in *De mathematicis complementis*, rühmt er sich wegen dieser Erkenntnis.¹⁹

Es ist ein Glücksfall, dass sich diese Vorform erhalten hat, denn sie gewährt uns einen Einblick in Cusanus' Arbeitsmethode. Sie zeigt trotz der mathematischen Unzulänglichkeiten, dass er interessante Ideen hatte, und sie lässt – anders als die übrigen erhaltenen mathematischen Schriften – erkennen, welche Rechnungen er anstellte, um seine Annahmen zu untermauern.

18 *De arithm. compl.*: h XX, N. 8, Z. 1–4: »Tali via omnes chordae notae erunt, quod veteres summo studio quaerentes attingere non potuerunt. Omnes hactenus praecisionem chordae gradus unius, duorum, quattuor, octo et sic deinceps, ut nosti, se ignorasse fatentur.«

19 *De math. compl.* I: h XX, N. 36, Z. 1–4: »Ex antehabitis quicquid hactenus in geometricis ignotum fuit, inquiri poterit. Fuit autem incognita perfectio artis de sinibus et chordis. Nemo umquam scire potuit chordam arcus gradus unius et duorum et quattuor et ita consequenter, quae nunc sic habetur.«