

## VOLLENDUNG UND ANFANG

### II Zur Genese der Schrift "*De mathematica perfectione*"

Von Marco Böhlandt, München

Wenigstens zwölf rein mathematische Abhandlungen hat der deutsche Kardinal, Kirchenrechtler, Philosoph und Theologe Nikolaus von Kues (1401–1464) zwischen den Jahren 1445 und 1459 verfasst. Sie alle zeugen von seiner Grundauffassung, dass jedes Bemühen um die höchsten Formen der Erkenntnis ohne Berücksichtigung der elementaren Fragestellungen der Mathematik letztlich scheitern muss. In seiner Schrift *Über die belehrte Unwissenheit* von 1440 hat er dieses Grundprinzip seines Denkens in einer für sein gesamtes Schaffen paradigmatischen Formel verankert: [. . .] *Cum ad divina non nisi per symbola accendi nobis via pateat, quod tunc mathematicalibus signis propter ipsorum incorruptibilem certitudinem convenientius uti poterimus.*<sup>1</sup>

In dieser Überzeugung steht Cusanus in einer langen, geistesgeschichtlichen Tradition, der sich der ausgezeichnete Schriftenkenner sehr bewusst gewesen ist, denn, so fährt er an gleicher Stelle fort [. . .] *nemo antiquorum, qui magnus habitus est, res difficiles alia similitudine quam mathematica aggressus est* [. . .].<sup>2</sup> Ausdrücklich weist Cusanus darauf hin, dass die philosophische Auszeichnung des Mathematischen bei den Peripatetikern und Pythagoräern ebenso zu finden sei wie bei Platon und Aristoteles und sich über diese Vorbilder bis zu Boëthius und Aurelius Augustinus fortgesetzt habe.<sup>3</sup> Keiner der Genannten aber hat, bei aller grundsätzlichen Gemeinsamkeit in der Wertschätzung der geometrischen und arithmetischen Symbolsprache, die eigene Lehre so eng an eine einzelne, wenngleich fundamentale Fragestellung der Mathematik geknüpft wie Cusanus. Seine mathematischen Schriften kreisen sämtlich um das geometrische Doppelproblem der Kreisquadratur und der Kurvenausstreckung, und es ist zugleich dieses, das als aenigmatisches *pars pro toto* seiner gesamten Lehre immer wieder in unterschiedlichster Gestalt auch in seinen philosophisch-theologischen Hauptschriften in Erscheinung tritt. Für Cusanus ist die Kreisquadratur mehr als ein reines didaktisches

<sup>1</sup> *De docta ign.* I, 11: h I, S. 24, Z. 7–9 (N. 32).

<sup>2</sup> Ebd., S. 23, Z. 3–4 (N. 31).

<sup>3</sup> Ebd. Z. 4–7 (N. 31) und 9–21 (N. 32).

Vehikel. Es geht Cusanus in seinen formalmathematischen Analogien nicht allein um die reine Anschaulichkeit der geometrischen Symbolik, er will in der Mathematik, die ihm selbst als höchste aller menschlichen Schöpfungen gilt, mit den Mitteln seiner eigenen Unendlichkeitsmetaphysik gestaltend wirken. Es ist vor allem der unermüdlichen Dechiffrierungsarbeit Joseph Ehrenfried Hofmanns zu verdanken, dass heute nicht mehr nur die Bedeutung der mathematischen Symbolismen für die cusanische Seins- und Erkenntnislehre, sondern umgekehrt auch das Bemühen des Cusanus um den fruchtbaren Einsatz der elementarsten Grundsätze seiner Philosophie auf dem Feld der konkreten Mathematik ins Blickfeld der Forschung gerückt sind.<sup>4</sup> Hierin nun nimmt die Schrift *De mathematica perfectione*,<sup>5</sup> die Cusanus als bereits gereifter und angesehener Theologe und Kirchenrechtler im Kardinalsstand verfasst, eine besondere Stellung ein. Denn wirklich Beachtliches verspricht Cusanus hier: Nichts Geringeres als die *Vollendung der Mathematik* will er leisten. Nach 500 Jahren überaus bewegter Mathematikgeschichte könnte das Erstaunen angesichts solch selbstbewusster Programmatik kaum größer sein, und das umso mehr, als Cusanus für sein ehrgeiziges Unternehmen nicht mehr als ein paar handgeschriebene Seiten veranschlagt hat und sich auch hier im Kern vorrangig auf das Problem der Kreisrektifikation konzentriert. Will man Cusanus also auf seinem Weg zur mathematischen Vollendung folgen, so ist es unerlässlich, sich zunächst mit dem fachmathematischen Gehalt der Schrift auseinander zu setzen, der schon

<sup>4</sup> Siehe hierzu unter anderem: CSt 7. *Die Quellen der Cusanischen Mathematik I*: Ramon Lulls Kreisquadratur (Heidelberg 1942); *Nikolaus von Kues – Der unwissend-Wissende*, in: Praxis der Mathematik 6 (Köln 1964); *Nikolaus von Kues und die Mathematik*, in: Schweizer Rundschau 63 (1964) 169–183; *Mutmaßungen über das früheste mathematische Wissen des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 5 (1965) 98–133; *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 10 (1973) 13–58; *Über Regiomontans und Butéons Stellungnahme zur Kreisquadratur des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 6 (1967) 14–154; *Vom Einfluß der antiken Mathematik auf das mittelalterliche Denken*, in: Miscellanea Mediaevalia 1: *Antike und Orient im Mittelalter*. Vorträge der Kölner Mediaevistentagungen 1956–1959, hrsg. v. P. Wilpert (Berlin 1962) 96–112.

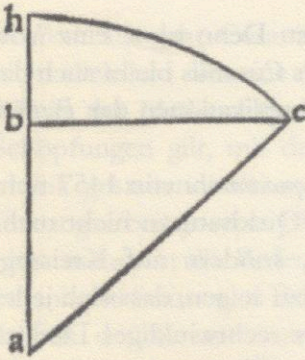
<sup>5</sup> *Nicolai Cusae Cardinalis Opera*, hrsg. v. Jean Faber d'Étaples (u. a.) (Paris 1514), (ND Frankfurt 1962) Bd. 2, fol. 101<sup>r</sup>–107<sup>r</sup>, im Folgenden zit. als: PM, p 2. Die deutsche Übersetzung des Traktats findet sich in: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften*, übersetzt von Josepha Hofmann, mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hofmann (Leipzig/Hamburg 1952; Neuauflage 1979).

für sich genommen überaus bemerkenswert ist. Denn ohne eine Vorstellung von der mathematischen Denkweise des Cusanus bleibt auch der Ausblick auf die philosophisch-theologischen Implikationen der *Perfectio* und ihrer Nachfolgeschriften verschwommen.

Spätestens seit der Schrift *De caesarea circuli quadratura* von 1457 richtet Cusanus sein Hauptaugenmerk bei seinen Quadraturen nicht mehr auf vollständige Kreis- und Polygonflächen, sondern auf Kreissegmente.<sup>6</sup> In *De mathematica perfectione* versucht er zu zeigen, dass sich jedes Kreissegment durch ein ihm einbeschriebenes rechtwinkliges Dreieck  $\Delta abc$  eindeutig darstellen lässt. Grundlage seiner Überlegungen sind die folgenden Bestimmungsgrößen am Kreissegment:<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Interessant ist in diesem Zusammenhang ein Abschnitt in den späteren Stellungnahmen des Peurbach-Schülers Johannes Regiomontanus (1436–1476) zu den cusanischen Quadraturversuchen. Eine der dort behandelten Schriften ist uns in ihrem vollen ursprünglichen Wortlaut nicht bekannt, wird aber von Regiomontanus ausdrücklich, in griechischer Sprache als Überschrift zum letzten, umfangreichen Abschnitt des Textes, Cusanus zugeschrieben: *De triangulis omnimodis libris quinque*, hrsg. v. J. Schöner (Nürnberg 1533) (mit selbständig paginierter Zählung) 67 (im Folgenden zit. als: RN). Dieser letzte Abschnitt enthält eine detaillierte Darlegung der von Regiomontanus zur Probe des Quadraturverfahrens ausgeführten Berechnungen. Bereits Paul Schanz hat auf das nämliche Stück verwiesen, sich aber nicht näher mit den Einzelheiten auseinandergesetzt: P. SCHANZ, *Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker* (Wiesbaden 1976) [Nachdruck der Ausgabe: Rottweil 1872], 22. Die dem Text zugrundeliegende Rechenvorschrift lässt sich nicht eindeutig auf eine der bekannten Quadraturregeln des Cusanus zurückführen, so dass es sich wohl weder um eine textliche Variante noch um einen bisher unbekanntem Abschnitt der dem Kardinal zugeschriebenen mathematischen Traktate handelt. Leider gibt Regiomontanus den Urtext nicht vollständig wieder, sondern beschränkt sich auf die Zusammenfassung des in seinem Urteil mathematisch Essentiellen. Immerhin geht aus dem Text eindeutig hervor, dass der Quadraturansatz an Kreissegmenten zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  formuliert wurde. Die Analyse der zugrundeliegenden Methode lässt es schlüssig erscheinen, den unbekanntem Traktat in der zeitlichen Umgebung der *Quadratura circuli* (ca. 1450) und damit deutlich vor *De caesarea circuli quadratura* zu verorten. Aus diesem werkgeschichtlichen Kontext heraus könnte die Schrift als Vorläufer und Entwicklungskeim für die Quadraturschriften aus den letzten Jahren des Cusanus, einschließlich der *Perfectio*, verstanden werden.

<sup>7</sup> Die folgende Abbildung ist entnommen aus: *PM*, p 2, fol. 101<sup>v</sup>.



Dabei stellt die Strecke  $\overline{ac}$  den Kreisradius,  $\overline{bc}$  eine Kreissehne und  $\overline{bh}$  den Pfeil (*sagitta*), also den Überschuss des Bogens über die Sehne dar. Unter Einbeziehung dieser Größen basiert die cusanische Quadratur nun auf der folgenden Proportionalitätsannahme:

*Si orthogonii latus quo no[n] est maius ponatur linea prima [et] semidiameter circuli, [et] latus quo no[n] est minus [ponatur] secu[n]da linea [et] semichorda, [et] reliquu[s] latus [ponatur] tertia linea, quae erit semiarculus ad semichordam habitudo? Illa erit lineae aequalis tribus primis lineis ad linea aequale duabus primis cu[m] tertia.<sup>8</sup>*

Die Verbalalgebra lässt sich leicht in eine für die mathematische Analyse geeignetere Form bringen. Gemeint ist das Folgende:

$$\frac{\overline{ch}}{\overline{bc}} (= \frac{\text{Halbbogen}}{\text{Halbsehne}}) = \frac{3\overline{ac}}{2\overline{ac} + \overline{ab}} (= \frac{3r}{2\overline{ac} + \overline{ab}})$$

(mit  $r = \text{Kreisradius}$ )

Den Geltungsbereich dieser Gleichung schränkt Cusanus ausdrücklich auf rechtwinklige Dreiecke ein, indem er nur Mittelpunktswinkel (d. i. der Winkel zwischen Strecke  $\overline{ab}$  und  $\overline{ac}$ ) von  $0^\circ - 45^\circ$  zulässt. Die beiden Grenzfiguren, das *kleinste Dreieck*<sup>9</sup> mit Kathete  $\overline{bc} = 0$  (Öffnungswinkel  $0^\circ$ ) und das gleichseitige *größte Dreieck*<sup>10</sup> ( $\overline{ac} = \overline{bc} = \overline{ab}$ ) (Öffnungswinkel

<sup>8</sup> PM, fol. 101<sup>r</sup> = Nikolaus von Cues. *Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 162f.

<sup>9</sup> PM, Nikolaus von Cues. *Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 163 = p 2, fol. 101<sup>v</sup>: Orthogonius est tanto minor, qua[n]to prima linea tertia minus excedit. Si igitur posset dari minimus orthogoni, [sic] prima tertia non excederet.

<sup>10</sup> Ebd.: Maximus aute[m] orthogonius est, qua[n]do prima excedit tertiam maxime. Et hoc erit, qua[n]do tertia erit ut secu[n]da, quia no[n] est minor.

45°) nutzt Cusanus zur Verallgemeinerung des Proportionalitätssatzes mittels einer Koinzidenzüberlegung. Aus der Gültigkeit des Satzes für die beiden Sonderfälle für 0° und 45° schließt er, dass der Verhältnissatz *folglich für alle dazwischenliegenden [rechtwinkligen] Dreiecke Bestand hat*.<sup>11</sup> Die Vorstellung, dass *eine im Grenzwert festgestellte Eigenschaft zur Kennzeichnung des Bildungsgesetzes der Zahlenfolge hinreichen könne*,<sup>12</sup> ist vom Standpunkt der neuzeitlichen infinitesimalen Methode natürlich so nicht zulässig und als Grundlage eines streng mathematischen Beweisverfahrens untauglich. Auch der sich im Text anschließende Beweisgang ist, auch wenn nicht der strenge (und zweifellos nicht ganz gerechte) Maßstab moderner formalalgebraischer Beweisverfahren angelegt wird, schwer bis gar nicht verständlich. Zunächst führt Cusanus eine Zwischenwertbetrachtung am *größten* Dreieck (↔ 45°) durch. Demnach soll für das Verhältnis von Bogen  $hc$  und Sehne  $bc$  gelten:

$$\frac{\overline{ac} + 3\overline{ac}}{\overline{ab} + 3\overline{ac}} < \frac{\overline{hc}(= \text{Kreisbogen})}{\overline{bc}(= \text{Kreissehne})} < \frac{\overline{ac} + \overline{ac}}{\overline{ab} + \overline{ac}}$$

Die Richtigkeit des Verhältnissatzes bedarf keines detaillierten Beweises. Nach einfacher arithmetischer Umformung und geometrischer Substitution entspricht er der folgenden Ungleichung:

$$\frac{\overline{4ac}}{\overline{4ac - bh}} < \frac{\overline{3ac}}{\overline{3ac - bh}} < \frac{\overline{2ac}}{\overline{2ac - bh}}$$

Diesen recht groben Verhältnissatz versucht Cusanus für den Beweis seiner Quadraturgleichung urbar zu machen und greift hierzu auf die Approximationen aus der archimedischen *Dimensio Circuli*<sup>13</sup> zurück, mit

<sup>11</sup> Ebd. 164 = p 2, fol. 101<sup>v</sup>: [...] igitur in omnibus intermediis orthogoniis eade[m] remanebit. Ferner: Ebd. S. 169 = p 2, fol. 102<sup>v</sup>: Quonia[m] vides quomodo id q[uo]d verificat de maximo et minimo verificat de mediis. Et quod ille qui videt maximu[m] coincidere cu[m] minimo qu[am] maximu[m] pariter et minimu[m] ille in ipso videt o[mn]ia.

<sup>12</sup> J. E. HOFMANN, *Vorform* (wie Anm. 4) 54.

<sup>13</sup> Hier und im Folgenden nach der Ausgabe: *Archimedes, Kreismessung*, in: Werke des Archimedes, Hrsg. v. A. CZWALINA (Darmstadt 1972) 370–377.

der er spätestens seit der Abfassung seines Traktats *Über die arithmetischen Ergänzungen* zumindest in Grundzügen vertraut gewesen sein muss,<sup>14</sup> und die fraglos zu den Schlüsselschriften der sich neu konstituierenden Rezeptionstradition der archimedischen Lehre innerhalb des italienischen Humanismus gehört.<sup>15</sup> Um die Qualität seines neuen Verfahrens an der maßgeblichen Autorität in der Quadraturfrage messen zu können, wählt Cusanus seine Beispielwerte in Übereinstimmung mit Archimedes. Im betrachteten Kreisquadranten ( $\sphericalangle 45^\circ$ ) setzt er zunächst den Radius  $\overline{ac}$  gleich 7, um dann Strecke  $\overline{ab}$  näherungsweise (!) mit 5 zu bestimmen.<sup>16</sup> Im gegebenen gleichschenkligen Dreieck muss nun beim vorgegebenen Öffnungswinkel natürlich auch die Strecke  $\overline{bc}$  notwendig 5 betragen. Cusanus setzt nun die Obergrenze aus der archimedischen Kreisquadratur ( $\pi = \frac{22}{7}$ ) zur angenäherten Berechnung des Halbmessenumfangs (nach  $\pi \cdot r$ ) ein und erhält  $\frac{hc}{bc} = \frac{11}{10}$  (mit Strecke  $\overline{bb} \approx 2$ ). Im vorgegebenen Fall nun zeigt sich, dass die von Cusanus aufgestellte Untergrenze nach  $\frac{4ac}{4ac - bh} (= \frac{14}{12})$  deutlich kleiner, die Obergrenze nach  $\frac{2ac}{2ac - bh} (= \frac{28}{26})$  deutlich größer

<sup>14</sup> Die Schrift *Über die Arithmetischen Ergänzungen* war, wie die früheste bisher bekannte Quadratur­schrift des Cusanus *De geometricis transmutationibus*, für den Florentiner Arzt und Mathematiker Paolo Toscanelli bestimmt. Sie muss kurz nach den *Transmutationes* und wahrscheinlich im Spätherbst 1445 in Koblenz entstanden sein (diese Datierung findet sich u. a. bei J. E. HOFMANN, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* [wie Anm. 5] 198, Anm. 1). In ihr kommt Cusanus ausdrücklich auf die sogenannten archimedischen Grenzen, Ober- und Untergrenze für den Wert der Kreiszahl, zu sprechen: *De arithmetis complementis*, p. 2, fol. 54<sup>r</sup>–55<sup>r</sup>, hier: fol. 54<sup>r</sup> = *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 30. Cusanus war spätestens seit 1458 auch mit dem neuen Archimedes-Korpus des Jacobus Cremonensis vertraut. In der Abhandlung *De mathematicis complementis* (CM) aus dem gleichen Jahr spricht Cusanus seinem Freund und Förderer Papst Nikolaus V. (Thomas Parentucelli, [† 1397]) seinen ausdrücklichen Dank für die Übersendung einer *neuen Archimedesübersetzung* aus, in der die archimedischen Hauptschriften *durch das Bemühen des Papstes aus dem Griechischen [ . . . ] ins Lateinische übertragen* [worden] waren: CM, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 68 = p. 2, fol. 59<sup>v</sup>: Tradidisti enim mihi proximi diebus magni archimedis geometrica grece tibi presentata, et tuo studio in latinum conversa, que mihi tam admiranda visa sunt [ . . . ]. Hierbei kann es sich nur um den Corpus Cremonensis gehandelt haben.

<sup>15</sup> P. L. ROSE, *The Italian Renaissance of mathematics: Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo* (Travaux 'Humanisme et Renaissance 145) (Genf 1975) 30/31.

<sup>16</sup> PM, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 168–169 = p. 2, fol. 102<sup>v</sup>.

ist, als die entsprechenden, durch die archimedische Näherung bestimmten Grenzen für das Verhältnis von Kreisbogen und Sehne liefern.<sup>17</sup> Die Schlüsse, die Cusanus aus diesem Ergebnis ziehen zu können glaubt, basieren, vorsichtig gesagt, auf einer recht exotischen Logik: An der Richtigkeit der archimedischen Näherung hat Cusanus, ganz in Übereinstimmung mit der Schulmathematik seiner Zeit, keinen Zweifel. Da nun die von ihm aufgestellten Grenzen für die Kreiszahl  $\frac{4ac}{4ac-bh}$  und  $\frac{2ac}{2ac-bh}$  die archimedischen Grenzen selbst einschließen, sieht sich Cusanus in seinem prinzipiellen Vorgehen bestätigt: *Ideo linea cuius ac debet esse pars aliquota debet esse maior dupla et minor quadrupla.*<sup>18</sup> Dagegen ist auch prinzipiell nichts einzuwenden. Völlig unvermittelt aber schließt Cusanus seinen Beweisgang, indem er den zuvor mehr oder minder willkürlich festgesetzten Zwischenwert  $\frac{3ac}{3ac-bh}$  als verbindlich ansieht und deshalb glaubt, dass das korrekte Verhältnis  $\frac{hc}{bc}$  im Dreifachen der Strecke  $ac$  aufgesucht werden müsse, was natürlich seine eigentlich Ausgangsnäherung zwangsläufig stützen würde.<sup>19</sup> Warum Cusanus aber überhaupt annimmt,  $\frac{hc}{bc}$  müsse über ganzzahlige Vielfache von  $ac$  (dabei kommt nach den vorgegangenen Grenzziehungen natürlich nur  $3ac$  in Frage) aufgesucht werden, bleibt völlig rätselhaft. Die knappe Begründung innerhalb der Schrift liefert keine wirklichen Anhaltspunkte.<sup>20</sup> Im Grund genommen ist die gesamte Schlussweise das Produkt heuristischer Intuition. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die *Perfectio* in keiner Weise von den frühesten Quadraturversuchen des Cusanus in *De geometricis transmutationibus* oder *De circuli quadratura*. Dass die in diesen Schriften vorgebrachten Quadraturansätze im Endergebnis von der gleichen Qualität sind wie die immerhin mehr als 15 Jahre später entstandene *Perfectio* ist deshalb kaum verwunderlich. Wie nahe sich die zeitlich so weit entfernten Schriften auch in den methodischen Einzelheiten sind, hat bereits Joseph Ehrenfried Hofmann herausgestellt.<sup>21</sup> Es hat allerdings nicht den Anschein,

<sup>17</sup> Ebd. 169 = p 2, fol. 102<sup>v</sup>.

<sup>18</sup> Ebd.

<sup>19</sup> Ebd.: *Ideo linea cuius · ac · debet esse pars aliquota debet esse maior dupla et minor quadrupla.*

<sup>20</sup> Ebd.: *Causa aute[m] cur procedit argumentatio qu[od] linea quae quaeritur debe esse · ac · pars aliquota est ista: Quia cum debeat esse una in omnibus orthogoniis tunc necesse est qu[od] respiciat · ac · quae etia[m] est una in omnibus et non · ab · vel · bc · quae semp[er] variantur.*

<sup>21</sup> *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) XXXIXf.

dass sich der Cusanus selbst der engen Verwandtschaft dieser Schriften bewusst war. Wenn auch, wie Fritz Nagel zu Recht bemerkt hat, in den *objektiven Aussagen kein Fortschritt festzustellen ist*, so glaubte Cusanus mit der *Perfectio* doch einen genuin neuen Beitrag zum Quadraturproblem geleistet zu haben.<sup>22</sup> Man muss ausdrücklich anmerken, dass letztlich nur die algebraische Reduktion die Kohärenz der cusanischen Quadraturbeiträge in aller Deutlichkeit zutage treten lässt. Dieser Sichtweise allein aber entgeht das Wesentliche. Tatsächlich steht die *Perfectio* bei aller werkimmanenten Kontinuität doch im Zeichen fachlicher Innovation. Es hat den Anschein, als sei das Vertrauen des Cusanus in die Hinlänglichkeit mathematischer Schlussweisen in den späten Jahren noch einmal merklich gewachsen. Im ganzen Begründungsschema ist ein deutlicher Wandel von den stark philosophisch begründeten Ableitungen der frühesten mathematischen Traktate hin zu stärker innermathematisch kohärenteren Verfahren der späten Jahre zu verzeichnen.<sup>23</sup> Dass damit allerdings nicht auch stets eine größere Transparenz des Vorgebrachten einherging, zeigt die *Vollendung der Mathematik* überdeutlich. Will man aber in den unscharfen und mitunter schwer verständlichen Herleitungen der cusanischen Quadratur letztlich nur die verbalalgebraischen Limitationen des (zugegeben an großen mathematischen Entdeckungen vergleichsweise armen) 15. Jahrhunderts erkennen, dann tut man der Mathematik der Zeit Unrecht. Es genügt, den Blick auf den für die neuzeitliche Mathematik so einflussreichen Johannes Regiomontanus zu richten, der die Quadraturtraktate des Cusanus kurz nach dessen Tod einer eingehenden Revision unterzogen hat, um sich zu vergewissern, dass die Mathematik des 15. Jahrhunderts zu exakteren und stringenteren Beweisverfahren und klareren mathematischen Formalismen durchaus fähig war. Auch der Zeitgenosse steht, obwohl er die Ausnahmestellung des Cusanus in Philosophie und Theologie nirgends anzweifelt, dessen mathematischen Exkursen am Ende doch skeptisch, wenn nicht sogar ablehnend gegenüber.<sup>24</sup> Es sind nicht die bisweilen hervorragenden Einzelergebnisse der

<sup>22</sup> F. NAGEL, *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften*, BCG IX (Münster 1984) 172.

<sup>23</sup> Siehe auch: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) XXXVIII.

<sup>24</sup> Immerhin hielt er sie aber doch einiger umfangreicher Studien für wert, die in die Nürnberger Druckausgabe *De triangulis omnimodis libris quinque* aufgenommen wurden. Siehe hierzu: Anm. 1.



cusanischen Quadraturen, sondern die häufig kryptischen und sprunghaften Gedankengänge, die sie begleiten, die den jungen Ausnahmema-thematiker am Ende zu seiner so harschen Kritik an den mathematischen Exkursen des *Geometer ridiculus* bewogen haben.<sup>25</sup> Von hier aus schlug die Rezeptionsgeschichte der cusanischen Quadraturtraktate den gleichen Weg in die Marginalisierung durch die spätere Geisteswelt ein,<sup>26</sup> den auch die theologisch-philosophischen Hauptschriften des Kardinals genommen haben.<sup>27</sup> Vielleicht ist die enge Verzahnung problemorientierter und daher leicht überprüfbarer fachmathematischer Einzelforschung mit dem weiten Feld der spekulativen Philosophie sogar selbst ein entscheidendes Kriterium in der nach dem Tod des Cusanus rasch einsetzenden *damnatio memoriae* gewesen: Wenn der Universalist Cusanus sich nicht nur an seinen philosophisch-theologischen Leistungen, sondern auch an deren fruchtbaren Einsatz im Feld der exakten Wissenschaften gemessen wissen wollte, dann musste jede Inkonsistenz im Bereich der *mathemata* auch weitreichende Konsequenzen für das Ansehen und die Tragfähigkeit des gesamten Lehrgebäudes haben. Das Einheitsstreben der cusanischen Erkenntnislehre verlangt aber stets die Betrachtung von zwei Warten, der rational-mathematischen auf der einen, der spekulativ-philosophischen auf der anderen Seite. Nur im Bemühen um die integrale Fassung des cusanischen Erkenntnisbegriffs lassen sich dann schließlich viele jener Verständnislücken schließen, die Cusanus als Fach-

<sup>25</sup> *Brief des Johannes Regiomonte an Christian Roder* (datiert 4. Juli 1471), in: M. Curtze, *Abhandlungen zur Geschichte der exakten Wissenschaften 12: Der Briefwechsel des Regiomontan mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder*. (Leipzig 1902) 329: Nicolaus autem Cusensis cardinalis, geometra ridiculus Archimedisque aemulus, quantas ostendabundus nostra tempestate invexit nugas? Interessant ist dabei, dass sich Regiomontanus der großen Bedeutung des Raimundus Lullus für die cusanischen Quadraturversuche bewußt war. An zitiert Stelle fährt Regiomontanus fort: Quippe qui plurimos quadrabilis circuli modos edidit frivolos penitus et non nisi Lullianis quibusdam suasiunculis initentes. Es sollte hier allerdings angemerkt werden, dass Regiomontanus die Schrift *Über die Vollendung der Mathematik* nicht in seine Revision aufgenommen hat.

<sup>26</sup> Vgl. hierzu: F. NAGEL, *Entstehung der exakten Wissenschaften* (wie Anm. 22) 86–165.

<sup>27</sup> Die bisher umfangreichste rezeptionsgeschichtliche Abhandlung zu Nikolaus von Kues liefert: ST. MEIER-OESER, *Die Präsenz des Vergessenen*. Zur Rezeption der Philosophie des Nicolaus Cusanus vom 15. bis zum 18. Jahrhundert, BCG X (Diss. Münster 1989).

mathematiker hinterlassen hat. Wenige haben bis zum Beginn der Cusanusrenaissance im späten 19. Jahrhundert, die sich im Übrigen interessanterweise vorrangig auf die Ergebnisse der noch jungen Mathematikgeschichte gründete,<sup>28</sup> diese Mühen auf sich genommen. Doch selbst noch die spätere Cusanusforschung des 20. Jahrhunderts hat den großen Bogen des cusanischen Unitarismus nicht immer zu überschauen vermocht, was sich paradigmatisch am streitbaren Diktum Karl Jaspers abgelesen lässt, Cusanus könne *kein Ort in der Geschichte irgendeiner Wissenschaft* zugesprochen werden.<sup>29</sup> Wer hierin nun allerdings nur die Manifestation eines mangelnden Verständnisses für die Bedeutungszusammenhänge einer vergangenen Geistesepoche seitens der neuzeitlichen Wissenschaftsgeschichte erkennen will, greift viel zu kurz. Denn auch die Zeitgenossen und die unmittelbare Nachwelt scheinen mitunter erhebliche Schwierigkeiten mit den mathematischen Deduktionen des Cusanus gehabt zu haben. Ein gutes Beispiel liefert die Drucklegung der *Perfectio* in der Straßburger Edition der *Opera Omnia* von 1488. Sie zeugt an entscheidender Stelle von völligem Unverständnis für das eigentliche Anliegen der Schrift.<sup>30</sup> Dort, im ältesten der drei Frühdrucke, wird der fragliche Verhältnissatz über die Verhältnisse am Kreisektor (fehlerhaft) wie folgt wiedergegeben:

*Ualitudo*<sup>31</sup> *trium diametrorum circuli ad suam circumferentiam est ut 14 cum radice de 36 et 3/4 ad 12.*<sup>32</sup>

<sup>28</sup> Siehe hierzu: A. G. KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik: Seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts*, Bd. 1 (Hildesheim 1970) [repr. Nachdr. der Ausg.: Göttingen 1796] 40f.; G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch* (oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und litterarischen Nachrichten begleitet in alphabetischer Ordnung), Bd. 4 (Leipzig 1823) 77–81; M. CHASLES, *Geschichte der Geometrie* (hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden). (Vaduz/Liechtenstein 1988) [unveränd. Neudr. der Ausg. Brüssel 1837], 622f.; P. SCHANZ, *Der Cardinal Nicolaus von Cusa* (wie Anm. 6); ausführlich zur mathematikhistorischen Aufarbeitung der cusanischen Quadraturen: F. NAGEL, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 22) 166–172.

<sup>29</sup> K. JASPERS, *Nicolaus Cusanus* (München 1964) 131.

<sup>30</sup> *Opera omnia*, ed. M. Flach (Straßburg 1488), hier zit. nach der Neuausgabe des lateinischen Inkunabeldrucks: *Werke des Nikolaus von Kues*, Bd. 2, P. Wilpert (Hg.) (Berlin 1976) 698–709. Im Folgenden zit. als : a 2

<sup>31</sup> = *ualetudo*, hier zu übersetzen als: Verhältnis.

<sup>32</sup> a 2, p 497 = ed. Wilpert, S. 708 u. Anm. 3.

Es handelt es sich hierbei zwar wohl um einen reinen Übertragungsfehler. Allerdings ist nicht eindeutig auszumachen, ob die fehlerhafte Angabe von ›12‹ statt der korrekten ›21‹ direkt, etwa durch eine Nachlässigkeit des Editors oder Drucksetzers, oder aber möglicherweise indirekt, durch eine fehlerhafte oder verderbte handschriftliche Vorlage in den Druck eingegangen ist. Es hat den Anschein, dass die Druckvorlage der *Perfectio* bei der Vorbereitung der Straßburger Edition keiner eingehenden fachlichen Revision unterzogen wurde. Denn mit den dort gegebenen Zahlenwerten würde die Kreiszahl bestimmt zu

$$(\pi =) \frac{36}{14 + \sqrt{36,75}} = 1,794421\dots$$

Selbst dem mathematisch Ungeübten und mit den elementaren archimedischen Grundsätzen der Kreisquadratur nicht näher Vertrauten hätte die grobe Fehlerhaftigkeit des Ergebnisses selbst nach nur oberflächlicher Prüfung aufgehen müssen – vorausgesetzt, der Revisor war sich überhaupt vollständig über die Zielsetzung und methodischen Prämissen des cusanischen Versuchs im Klaren. Immerhin scheint der zentrale Gedankengang im Entwurf des Cusanus selbst für ausgemachte Fachleute nicht in jeder Hinsicht evident geworden zu sein. So gibt auch Omisanctus Vasarius, der eifrige Kommentator und mathematische Sachverständige der späteren Pariser Edition nach Faber Stapulensis, die Verhältnisgleichung in deutlicher Abweichung von den bekannten handschriftlichen Versionen an. Dort lautet die entsprechende Passage:

*Valor trium diametrorum circulia ad suam circumferentiam est ut radix de 4 cum radice de 36 [et] de 12 ad 12.*<sup>33</sup>

Offensichtlich hat sich der kritische Revisor hier vorrangig am älteren Straßburger Druck orientiert, dabei aber richtig erkannt, dass die dort angegebenen Zahlenwerte falsch sein mussten. Interessanterweise hat er hieraus nicht die einfache Konsequenz gezogen, die Richtigkeit des letztgenannten Wertes ›12‹ anzuzweifeln, sondern diesen vielmehr als verbindlich angesehen und versucht, die übrigen Parameter hin zur kontinuierlichen Proportion  $\sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{36}$  ( $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}, \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = 36$ )

<sup>33</sup> p 2, fol. 107<sup>r</sup>.

zu korrigieren. Im Ergebnis stimmen die Angaben im Pariser Druck dann zwar mit denen des Cusanus überein.<sup>34</sup> Der umfangreiche Kommentarteil, zu dem sich Omnisantus veranlasst sah, offenbart allerdings, dass auch der mathematische Fachmann weite Teile der Schrift für erklärungsbedürftig hielt. Man darf bei all dem nicht vergessen: Letztlich schreibt Cusanus als Laie für den Fachmann. Was er selbst an mathematischen Begründungen und Beweisen nicht zu leisten vermag, das überlässt er anderen, wie den mit ihm befreundeten Mathematikern Paolo Toscanelli oder Georg Peurbach, denen er seine Quadraturversuche vor der Veröffentlichung häufig zu Korrekturzwecken überließ.<sup>35</sup> Das stärkste Argument für die hohe Güte der cusanischen Quadratur in der *Perfectio* liefert dann auch nicht das eher verwirrende als klärende Beweisfragment, sondern die konkrete Probe des Verfahrens, die Cusanus auch selbst vorgenommen hat. Solche konkreten Zahlenbeispiele finden sich äusserst selten in den genuin mathematischen Traktaten des Cusanus, und zumeist nur in jenen Abhandlungen, die durch die Begutachtung seiner mathematiktreibenden Freunde abgesichert waren.<sup>36</sup> Im Falle der *Perfectio* aber scheint Cusanus ganz ohne äußeren Zuspruch von der Qualität seines eigenen Ansatzes so überzeugt gewesen zu sein, dass er sogar den indirekten Vergleich mit Archimedes wagt, indem er dessen Kreisnäherungen als Ausgangsgrößen in die eigene Proberechnung einbezieht:

<sup>34</sup> Das kann man sich wie folgt leicht klar machen: Dividiert man den cusanischen Referenzwert für den Kreisumfang durch 12, den Wert, den die Drucke verwenden, erhalten wir:  $21:12 = 1,75$ . Nun lassen sich beide Verhältnisgleichungen leicht ineinander überführen:

$$\sqrt{4} + \sqrt{36} + \sqrt{12} = 2 + 6 + \sqrt{12} \approx 36 \mid \cdot 1,75 \Leftrightarrow 14 + \sqrt{12} \cdot 1,75 = 14 + \sqrt{36,75} \approx 63$$

<sup>35</sup> So sollte Paolo Toscanelli, der Cusanus seit ihrer gemeinsamen Studienzeit in Padua in einer engen Freundschaft verbunden war, als erfahrener Richter (*arbiter peritissimus*) und Eiferer für die Wahrheit (*zelator veritatis*) sein fachmännisches Urteil zur Schrift *Über die geometrischen Verwandlungen* abgeben: TG, Nikolaus von Cues. *Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 4 = p 2, fol. 33<sup>r</sup>.

<sup>36</sup> So ließ beispielsweise eine ausführliche Probe des zentralen Ansatzes aus der frühesten bekannten Quadraturschrift des Cusanus, *De geometricis transmutationibus* von 1445, immerhin 5 Jahre auf sich warten. Erst in *De circuli quadratura* aus dem Jahre 1450 wagt Cusanus die konkrete Durchrechnung des älteren Versuchs. Die *Transmutationes* waren allerdings vorher zu Korrekturzwecken an den Florentiner Arzt und Mathematiker Paolo Toscanelli gegangen, der Cusanus seit der gemeinsamen Studienzeit in Padua in enger Freundschaft verbunden war. Hierzu: TG, p 2, fol. 33<sup>r</sup> = Nikolaus von Cues. *Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 4.

Durch diese Übernahme der archimedischen Grenzwertbetrachtungen muss die cusanische Näherung im Endergebnis trotz aller Unstimmigkeiten in der Herleitung im Abschluss sehr gut werden.<sup>37</sup> Cusanus liefert, neben anderen Anwendungsbeispielen, auf der Grundlage der von ihm aufgestellten Ausgangsproportion unter Einbeziehung der archimedischen Grenzwerte mit

$$\frac{\text{Kreisumfang}}{\text{Kreisradius}} (= \pi) = \frac{63}{14 + \sqrt{36 \frac{3}{4}}} (\approx 3,140237\dots)$$

dann auch ein mehr als beachtliches Ergebnis.<sup>38</sup> Cusanus selbst hat angesichts der hohen Güte des ermittelten Wertes *De mathematica perfectione* später als seine beste Quadraturabhandlung bezeichnet und die Schrift, als einzige seiner fachmathematischen Abhandlungen neben den zwei Büchern *De mathematicis complementis*, in die Kueser Prachthandschriften-sammlung aufnehmen lassen.<sup>39</sup> Wichtiger als das gute Einzelergebnis ist aber das Folgende: Trotz des spürbaren Drangs nach innermathematischen Begründungen kann Cusanus in *De mathematica perfectione* zwar auf den originär spekulativ-philosophischen Begriff der *coincidentia* nicht verzichten. Aber er dient ihm hier nicht mehr, wie noch in den frühen Quadraturschriften, alleinig zur Begründung heuristisch ermittelter Proportionen, sondern wird nahezu im Sinne eines mathematischen Axioms verwandt. Vom allgemeinen Prinzip der Koinzidenz nähert sich Cusanus

<sup>37</sup> Behält man die vorgegebenen Zahlenwerte ( $ac = 7$ ,  $ab = 5$  und  $bc = 5$ ) bei, so ergibt die cusanische Approximation:

$$\frac{hc}{bc} = \frac{21}{19} = 1,1111\dots$$

Nach Archimedes ergibt sich im gleichen Fall:

$$\frac{hc}{bc} = \frac{11}{10} = 1,108\dots$$

Dabei liegt der cusanische Wert für die Kreiszahl zugleich innerhalb der archimedischen Grenzen.

<sup>38</sup> *PM*, Nikolaus von Cues. *Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 175 = p 2, fol. 107<sup>r</sup>.

<sup>39</sup> Hierüber gibt eine Glossierung in der Kueser Handschrift *De mathematicis complementis* Auskunft: CM, Cod. Cus. 219, fol. 51<sup>r</sup>: Post mortem pape Nicolai et calixti in principio papatus pii scripsi libellum de mathematica perfectione qui ponitur infra et prevalet omnibus.

dem ›Spezialfall‹ der Kreisquadratur an und findet dabei zu einer im Ergebnis hochwertigen und, das wiegt letztlich noch mehr, einfachen Näherungsregel. Am erstaunlichsten aber ist dabei, wie gut sich die *regula* aus der *Perfectio* für einen simplen, aber effektiven Näherungsalgorithmus zur Bestimmung der Kreiszahl verwenden lässt: Durch trigonometrische Substitution lässt sich die ganze Überlegung in die folgende Form bringen (wobei  $\delta$  den Öffnungswinkel  $\sphericalangle abc$  kennzeichnet):

$$\frac{\overline{ch}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{3ac}}{\overline{2ac + ab}} (= \frac{\overline{3r}}{\overline{2ac + ab}}) \rightarrow \text{arc } \delta \approx \frac{3 \sin \delta}{2 + \cos \delta}$$

In dieser Fassung nun lässt sich der Ansatz ohne größere Schwierigkeiten durch Anwendung der Taylorentwicklung analysieren.<sup>40</sup> Zunächst wird hierzu die gesamte Gleichung mit  $(2 + \cos \delta)$  erweitert:

$$\text{arc } \delta \approx \frac{3 \sin \delta}{2 + \cos \delta} \quad | \cdot (2 + \cos \delta) \quad (1)$$

Nach Kürzen und Ausmultiplizieren gilt dann:

$$2\delta + \cos \delta \cdot \delta \approx 3 \sin \delta \quad (2)$$

Nun gilt für die Potenzreihenentwicklung der beteiligten trigonometrischen Funktionen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (3) \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (4)$$

Beide Umformungen können nun zur Vereinfachung von Gleichung (2) herangezogen werden. Man kann hierzu die *cos*-Funktion auf der linken Seite der Gleichung wie folgt auflösen:

$$\cos \delta \cdot \delta = \delta \cdot \left( 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - \frac{\delta^6}{6!} \right) = \delta - \frac{\delta^3}{2!} + \frac{\delta^5}{4!} - \frac{\delta^7}{6!} \dots \quad (5)$$

<sup>40</sup> Im Folgenden siehe auch: P. BECKMANN, *A history of Pi*. (Boulder 1977) 84ff.

Diese Umformung kann nun in den linken Teil der Gleichung (2) eingesetzt werden:

$$2\delta + \cos \delta \cdot \delta = 3\delta - \frac{\delta^3}{2!} + \frac{\delta^5}{4!} - \frac{\delta^7}{6!} \dots \quad (6)$$

Für die rechte Seite der Gleichung ist unter Einbeziehung von (3) das Folgende direkt einsichtig:

$$3\sin \delta = 3\delta - \frac{\delta^3}{2!} + \frac{3\delta^5}{5!} - \frac{3\delta^7}{7!} \dots \quad (7)$$

Nach der Substitution können nun beide Seiten der Ausgangsgleichung komponentenweise verglichen werden:

$$3\delta - \frac{\delta^3}{2!} + \frac{\delta^5}{4!} - \frac{\delta^7}{6!} \dots \approx 3\delta - \frac{\delta^3}{2!} + \frac{3\delta^5}{5!} - \frac{3\delta^7}{7!} \dots \quad (8)$$

Die ersten beiden Glieder der Potenzreihen stimmen überein, im dritten Glied ist die Abweichung mit

$$\left(\frac{\delta^5}{4!} - \frac{3\delta^5}{5!}\right) = \frac{3}{5}$$

noch vergleichsweise gering. Zugleich wird schnell deutlich, dass die absolute Abweichung umso mehr abnimmt, je kleiner der Öffnungswinkel  $\delta$  gewählt wird. Letztlich korrespondiert der Öffnungswinkel also mit dem Grad des eingeschriebenen Polygons. Mit anderen Worten: Das Ergebnis der Näherung wird immer besser, wenn die Eckenzahl des eingeschriebenen Vielecks erhöht wird. Betrachtet man beispielsweise das regelmäßige 96-Eck, das auch dem archimedischen Ausrundungsverfahren der *Dimensio circuli* zugrunde liegt, erhält man bereits verblüf-

find gute Ergebnisse. Hierzu setzt man zunächst die Näherungsgleichung (1) ins Bogenmaß:

$$\frac{\pi\delta}{180^\circ} = \frac{3\sin\delta}{2 + \cos\delta} \quad (9)$$

Damit ist

$$\pi = \frac{180^\circ}{\delta} \cdot \frac{3\sin\delta}{2 + \cos\delta} \quad (10)$$

Für das 96-Eck gilt nun:

$$\delta = \frac{180^\circ}{96} = 1^\circ 52' 30'' \quad (11)$$

und damit, nach Einsetzen in (9):

$$\pi = 96 \cdot \frac{3\sin 1^\circ 52' 30''}{2 + \cos 1^\circ 52' 30''} = \underline{3,1415926272} \dots (12)$$

Gegenüber den 2 korrekten Stellen des archimedischen Verfahrens ergibt das cusanische Verfahren beim Übergang zum 96-Eck also bereits 7 Stellen genau! Nach Verdopplung der Eckenzahl auf 192 gewinnt man, obwohl die Größenunterschiede der Winkel bei steter Verdopplung der Eckenzahl rasch abnehmen, bereits eine weitere korrekte Nachkommastelle:

$$\pi = 192 \cdot \frac{3\sin 0^\circ 93' 75''}{2 + \cos 0^\circ 93' 75''} = \underline{3,141592652338} \dots (13)$$

Natürlich ist Cusanus weit entfernt von infinitesimalmathematischen Konzepten. Dass er sich aber durchaus bewusst ist, dass mit der Bestimmung der Kreiszahl letztlich ein unendlicher Iterationsprozess einhergehen muss, hat er noch kurz vor Abfassung der *Perfectio* in seinem *Dialogus inter Cardinalem sancti Petri Episcopum Brixinensem et Paulum physicum Florentinum de circuli quadratura*<sup>41</sup> deutlich gemacht: Zum ersten Mal

<sup>41</sup> *DQ* (= *Dialogus inter Cardinalem sancti Petri Episcopum Brixinensem et Paulum*



innerhalb der bekannten Quadratur Schriften zieht er dabei die Möglichkeit einer unendlichen Approximation der Kreiszahl in Betracht, ohne auf den Begriff der Koinzidenz auszuweichen. Die genaue Bestimmung des Verhältnisses von Kreisbogen und Radius kann demnach nur dann als prinzipiell durchführbar angesehen werden, wenn zugleich ein *processus in infinitum*<sup>42</sup> als statthaft angesehen wird. Was damit eigentlich gesagt wird, ist, dass jedwedes Verfahren zur Kreisrechnung notwendig stets bloße Näherung sein kann. Das nun fügt sich schlüssig in den epistemologischen Entwurf aus *De docta ignorantia* ein, wo Cusanus das Quadraturproblem regelrecht zur erkenntnistheoretischen Universalmetapher erhebt:

*Intellectus igitur, qui non est veritas, numquam veritate adeo praecise comprehendit, quin per infinitum praecisius comprehendi possit, habens se ad veritatem sicut polygonia ad circulum, quae quanto inscripta plurium angulorum fuerit, tanto similior circulo, numquam tamen efficitur aequalis, etiam si angulos in infinitum multiplicaverit, nisi in identitatem cum circulo se resolvat.*<sup>43</sup>

Nur über eine unendliche Anzahl von Verdopplungsschritten der Seiten (bzw. der Winkel) können Vieleck und Kreis vollständig angeglichen werden können. Ein solcher infinititer Iterationsprozess aber muss den Erkenntnisbereich der *ratio* und damit auch den Bereich des rein Mathematischen in letzter Konsequenz *notwendig* überschreiten. Die Unmöglichkeit, geradlinige Figuren im Bereich des Endlichen dem Kreis exakt anzugleichen, ist Cusanus ein *aenigma* der Unzulänglichkeit des end-

physicum Florentinum de circuli quadratura), D. Nicolai de Cusae Cardinalis Opera. [teils. Nachdruck der Ausgaben Paris 1514] (Basel 1565) p. 1095–1098 = Cod. Vat. Ottob. lat. 1870, fol. 166<sup>r-v</sup> = *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 143–150.

<sup>42</sup> *DQ*, Cod. Vat. Ottob. lat. 1870, fol. 166<sup>v</sup> = Cod. To. 19–26, fol. 192<sup>v</sup> = ed. Reinhardt, 127. K. REINHARDT, *Eine bisher unbekannte Handschrift mit Werken des Nikolaus von Cues in der Kapitelsbibliothek von Toledo (mit Transkriptionen der Vorform von De mathematica perfectione)*, in: MFCG 17 (Mainz 1986) 96–141. Die Formulierung steht im Kontext eines umfangreichen Textabschnitts, der sich, auf zwei Randbemerkungen verteilt, auf fol. 166<sup>v</sup> des Vatikanischen Kodex findet. Die Glossierungen stammen zweifelsfrei von Cusanus selbst. Der bedeutend längere Teil dieser nachträglichen Ausführungen ist auf dem genannten Blatt unterhalb des Textes und der geometrischen Figuren angefügt. Hierzu: K. REINHARDT, ebd. 128. Die Toletaner Handschrift des Dialogs hat diese nachträglich eingefügten Überlegungen berücksichtigt und in den eigentlichen Text eingebunden. Cod. To. 19–26, fol. 192<sup>v</sup>. Eine vollständige Transkription der Textstelle findet sich bei: K. REINHARDT, ebd. 127.

<sup>43</sup> *De doct. ign.* I, 3: h I, S. 9, Z. 14–20 (N. 10).

lichen unterscheidenden Denkens. In der Mathematik des Endlichen verbleiben alle Bemühungen um die Kreisquadratur notwendig reine Mutmaßungen. Die Kreisquadratur ist Cusanus damit auch eine mögliche Vorstufe der intellektualen Selbsterkenntnis der *docta ignorantia*, dass nämlich die *praecisio absoluta* nur in der unerreichbaren Unendlichkeit liegen kann, in der zugleich allein ein vollständiges Wissen um die göttliche Dreieinigkeit möglich (und verwirklicht) ist. Als fachmathematisches Problem ist die Quadratur also eine hilfswissenschaftliche Betrachtung auf dem Weg zur Theologie der unendlichen Einheit, die Kreiszahl das rationale Symbolon des *deus absconditus*.<sup>44</sup> Wenn also auch dem mathematisch-rationalen Geist, der sich als Schöpfer der mathematischen Symbole in der Geometrie auf seinem ureigensten Heimatgrund bewegt, endgültige Erkenntnisse in seiner Disposition gegenüber dem Unendlichen notwendig verwehrt bleiben, so liegt in der prinzipiellen Inkommensurabilität von Erkenntnis und Erkenntnisgegenstand doch stets auch ein positiver Impetus, denn die menschliche *mens* ist abseits ihrer faktischen, aktuellen Begrenztheit hinsichtlich ihrer Erkenntnismöglichkeit unbegrenzt. Dabei ist die Vergrößerung menschlicher Erkenntnisse, wie Heinrich Grell bemerkt hat, *nicht bloßer additiver Zuwachs*, sondern eine *echte Entwicklung*, da sich der Mensch in diesem intellektuellen Prozess seines *bis zur Unendlichkeit der Entfaltung* berufenen Wesens mehr und mehr bewusst wird.<sup>45</sup>

Es fällt zunächst schwer, dass knappe Schriftstück *Über die mathematische Vollendung* in den Kontext einer derart elaborierten und weitreichenden Erkenntniskonzeption zu rücken. Die Version der *Perfectio*, wie sie in die humanistischen Drucke und damit ins rezeptionsgeschichtliche Bewusstsein eingegangen ist, ist aber nur das Derivat einer deutlich weiter gefassten älteren Version der Schrift. Die aus den Frühdrucken und der Kueser Handschriftensammlung bekannte kürzere Fassung des Traktats geht auf ein Schreiben des Cusanus aus dem Herbst 1458 an den

<sup>44</sup> In diesem Sinne hat sich auch Joseph Ehrenfried Hofmann geäußert: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) X.

<sup>45</sup> H. GRELL, *Mathematischer Symbolismus und Unendlichkeitsdenken bei Nikolaus von Cues*, in: [Vorträge und Schriften der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 97:] Nikolaus von Cues: Wissenschaftliche Konferenz des Plenums der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin anlässlich der 500. Wiederkehr seines Todesjahres (Berlin 1965) 32–41, hier: 34.

spanischen Erzbischof von Lerida und Kurienkardinal Antonio de la Cerda († 1459) zurück.<sup>46</sup> De la Cerda hatte in einer nicht erhaltenen vorangegangenen schriftlichen Anfrage um *etwas Neues (aliquid novi)* aus der Hand des Cusanus gebeten und unter anderen die Schrift *Über die mathematische Vollendung* als Antwort erhalten.<sup>47</sup> Dieser endgültigen Fassung der *Perfectio* sind nun wenigstens zwei frühere handschriftliche Entwürfe vorausgegangen. Bereits im 1905 erschienen Handschriftenverzeichnis der Kueser Hospitalsbibliothek verzeichnete Jacob Marx unter Cod. Cus. 218 einen bis dahin unbekanntem radierten Text<sup>48</sup> mutmaßlich *mathematischen oder astronomischen* Inhalts von der Hand des Cusanus.<sup>49</sup> Erst 1968 konnte der ausradierte Text mit Hilfe einer Rhodan-Wasserstoff-Verdampfung teilweise wieder lesbar gemacht werden.<sup>50</sup> Joseph Ehrenfried Hofmann und Rudolf Haubst haben das rekonstruierte Fragment eindeutig als eine Vorform der Schrift *Über die mathematische Vollendung* identifiziert.<sup>51</sup> Die restaurierte Fassung zeigte, dass *De mathematica perfectione* ursprünglich über ein umfangreiches Einleitungs- und ein Schlusskapitel verfügte, die nur in stark gekürzter Fassung in die endgültige Version, die sich unter anderem unter Cod. Cus. 219, fol. 194<sup>r</sup>–198<sup>v</sup> vorfindet und den bekannten Drucken zugrunde liegt, eingeflossen sind.<sup>52</sup> Leider blieb die Transkription des wiederentdeckten Textes lückenhaft. Insbesondere das Schlusskapitel, das, wie Rudolf Haubst bemerkt hat, *sowohl vom mathematischen wie vom philosophischen Standpunkt aus höchstes Interesse verdient*,<sup>53</sup> konnte nur bruchstückhaft entziffert werden.

<sup>46</sup> Über die Biographie Kardinal de la Cerdas ist nur wenig bekannt, und es ist schwer festzustellen, ob er über die notwendige fachliche Expertise verfügte, den cusanischen Quadraturansatz in seiner Gänze zu würdigen. Immerhin aber ist unzweifelhaft, dass er mit Cusanus eine große Leidenschaft für die Sammlung von Handschriften philosophischen wie auch naturwissenschaftlich-mathematischen Charakters teilte.

<sup>47</sup> PM, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 160 = p 2, fol. 101<sup>r</sup>.

<sup>48</sup> Cod. Cus. 219, fol. 138<sup>r</sup>–141<sup>v</sup>: In einer Randnote auf fol. 138<sup>r</sup> findet sich die Notiz *vacat*, die Cusanus wahrscheinlich selbst eingefügt hat.

<sup>49</sup> J. MARX, *Verzeichnis der Handschriftensammlung des Hospitals zu Cues* (Trier 1905) 214; zu den weiteren bekannten Handschriften der Endfassung *De mathematica perfectione* s. *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) XLVIII–XLIX.

<sup>50</sup> J. E. HOFMANN, *Vorform* (wie Anm. 4) 13.

<sup>51</sup> Ebd.

<sup>52</sup> Die entsprechende Textkonkordanz, ebd. 29–51.

<sup>53</sup> Ebd. 51.

Erst 1983 konnte Klarheit über den genauen Inhalt der fehlenden Textstellen geschaffen werden. Das Textfragment unter Cod. Cus. 219 entspricht weitgehend einem von Klaus Reinhardt 1983 in der Kapitelsbibliothek von Toledo aufgefundenen Manuskript, das dort zusammen mit neun weiteren Abhandlungen des Cusanus in einer Sammelhandschrift vorliegt.<sup>54</sup> Da die Kopie einige der nachträglich in die Kueser Handschrift eingefügten Korrekturen des Cusanus in den Text übernommen hat, scheint sie von der Version Cod. Cus. 219 zumindest indirekt abhängig zu sein.<sup>55</sup> Zwei zentrale Fragen knüpfen sich an die Toletaner Handschrift: Wer war der Auftraggeber dieser Abschrift? Und wann wurde sie verfertigt? Das Manuskript, dessen Schriftbild von einem humanistischen Schreiber zeugt, trägt ein sehr auffälliges Wappen, auf das bereits Klaus Reinhardt hingewiesen hat.<sup>56</sup> Es handelt sich um einen Nager (wahrscheinlich eine Ratte), der an einer Ähre nagt. Trotz einiger Bemühungen ist es bisher nicht gelungen, die Herkunft des Wappens eindeutig zu klären. Sollte der Auftraggeber der Abschrift, wie Klaus Reinhardt vermutet hat, im näheren geographischen Umfeld Roms zu suchen sein, so lassen sich aber immerhin zwei einflussreiche Patrizierfamilien mit dem Wappen auf dem Toletaner Kodex in Verbindung bringen, zum einen die umbrischen da Empolis, zum anderen die römischen Giglios. Es können aber auf der Grundlage der bisher bekannten Quellen keinerlei Beziehungen zwischen diesen und Cusanus ausgemacht werden. Sicher ist nur, dass die Handschrift sich für einige Zeit im Besitz des Arztes Pierleone de Spoleto befand. Dieser war aber zweifellos nicht Auftraggeber der Schrift. Nur die Klärung der heraldischen Frage am Beginn der Toletaner *Perfectio* wird über die Entstehungsumstände des

<sup>54</sup> Codex Toletanus bibliothecae capitularis (= To) 19–26, fol. 188<sup>r</sup>–191<sup>r</sup>; Die Toletaner Version der *Perfectio mathematica* ist ediert in: K. REINHARDT, *Unbekannte Handschrift* (wie Anm. 42).

<sup>55</sup> Klaus Reinhardt hat den Weg dieser Schriftensammlung unter Cod. To. 19–26 nach Toledo zurückverfolgt. Demnach stammt der Kodex ursprünglich aus dem Privatbesitz des spanischen Kurienkardinals Francisco Xavier Zelada (1717–1801). Zelada überstellte seine Handschriftensammlung um 1798 nach Toledo. Dabei ging das Wissen um den Urheber des Cod. To. 19–26 offenbar verloren. Die Beschreibung der Handschriften im Toletaner Bestandsverzeichnis von 1808 enthält keinerlei Vermerke zur Autorenschaft des Cusanus. Hierzu: K. REINHARDT, *Unbekannte Handschrift* (wie Anm. 42) 98–100.

<sup>56</sup> Ebd. 96f.

Manuskripts Aufschluss geben können. Wenigstens aber lässt sich ungefähr abschätzen, wann die Toletaner Sammlung kompiliert wurde. Nach den Befunden Klaus Reinhardts ist der Kodex kurz nach Abfassung von *De non aliud* und damit um 1461 entstanden.<sup>57</sup> Wenn man diesen Zeitpunkt als *terminus post quem* für die Abfassung der gesamten Sammlung annimmt, dann hat das auch weitreichende Konsequenzen für die Textgrundlage der darin enthaltenen Abschrift der *mathematischen Vollendung*. Um das zu verstehen, muss man den Blick auf jene Schriften des Cusanus lenken, die in unmittelbarer zeitlicher Nähe zur *Perfectio* entstanden sind. In der Widmungsepistel der endgültigen Version *De mathematica perfectione* verweist Cusanus explizit auf die Schrift *Über den Beryll* [1458].<sup>58</sup> Der Textstelle ist zu entnehmen, dass Cusanus Kardinal de la Cerda neben *De mathematica perfectione* noch eine *kleine Schrift enthaltend eine Betrachtung über Spiegel und Gleichnis (speculum et aenigma)* übersandt hat.<sup>59</sup> Hierbei handelte es sich zweifelsfrei um *De beryllo*.<sup>60</sup> Im Gegenzug findet sich in *De beryllo* ein ausdrücklicher Verweis auf die Schrift über die *Mathematische Vollendung*.<sup>61</sup> Betrachtet man nur die endgültige Version *De mathematica perfectione*, so ist dieses von Cusanus angezeigte Abhängigkeitsverhältnis der beiden Schriften nur schwer nachzuvollziehen. Erst der Blick auf die genannten Vorformen des Quadraturtraktats und die Entstehungsumstände der Schrift *Über den Beryll* offenbart ihre mannigfaltigen Bezüge:

*De beryllo* entstand auf Anbitten der Mönche des Klosters Tegernsee, die häufig als Kopisten für Cusanus tätig waren und sich von ihm eine leichter verständliche Schrift erhofften über das, *was vielen dunkel erscheint, insbesondere über den Zusammenfall der Gegensätze, den unendlichen Kreis und derartiges*.<sup>62</sup> Dabei ging es den Tegernseer Mönchen nicht allein um ein

<sup>57</sup> Ebd. 130.

<sup>58</sup> Hier und im Folgenden zitiert nach der Ausgabe: *De beryllo*: h XI/1.

<sup>59</sup> PM, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 160–161 = p 2, fol. 101<sup>r</sup>.

<sup>60</sup> *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 246, Anm. 3: Der Bezug zu *De beryllo* ergibt sich deutlich aus dem Begriffspaar *speculum et aenigma*, das Cusanus bereits im ersten Kapitel der Schrift anführt: *De beryllo*, h XI/1, N. 1, Z. 6.

<sup>61</sup> *De beryl.*, h XI/1, N. 41, Z. 6–8: [ . . . ] quemamodum in libellis de mathematica perfectione de minimo arcu et minima chorda quomodo coincidunt dixi.

<sup>62</sup> Der Abfassung von *De beryllo* ging ein zweijähriger Briefwechsel zwischen und den Tegernseer Mönchen voraus, in dem die Ordensbrüder immer wieder mit Nachdruck

besseres Verständnis der cusanischen Philosophie und Theologie. Vielmehr erhofften sie sich von Nikolaus von Kues einen klärenden Beitrag zu einer Kontroverse um die mystische Theologie, die zur Jahrhundertmitte zwischen einigen süddeutschen Klöstern entbrannt war.<sup>63</sup> Protagonisten des Streits waren die Benediktinerklöster von Melk und Tegernsee auf der einen, das Kartäuserkloster von Aggsbach, das der mystischen Theologie weitgehend ablehnend gegenüber stand, auf der anderen Seite. Die Tegernseer wandten sich an Cusanus als einen bekannten Exegeten und Fürsprecher der Mystik. Dass neben Platon und Aristoteles Dionysius Areopagita zur prägenden Referenzquelle für die Schrift *Über den Beryll* geworden ist, kann vor diesem Hintergrund kaum verwundern.<sup>64</sup> Die Toletaner Vorform der *De mathematica perfectione* entstand mit großer Sicherheit zur gleichen Zeit, in der Cusanus seinen *Beryll* verfasste, also noch in der Veste Buchenstein, in der sich Cusanus nach den Misserfolgen bei der Durchsetzung seiner Machtansprüche in der Diözese Brixen bis zu seiner endgültigen Übersiedlung nach Rom im September 1458 aufhielt.<sup>65</sup> Wahrscheinlich ist auch diese Schrift zusammen mit *De beryllo* an die Mönche von Tegernsee gegangen.<sup>66</sup> Auch hier findet sich, zum einzigen Mal innerhalb der mathematischen Abhandlungen des Cusanus, der Name des Pseudo-Areopagiten. Im Schlusskapitel der Toletaner Version nennt Cusanus ihn gleich zweimal. Die entsprechenden Textpassagen sind in der Version Cod. Cus. 219 nicht mehr vollständig zu entziffern. Rudolf Haubst hat aber bereits im Zuge der Rekonstruktion der Kueser Handschrift die Formulierung *ante omnem positionem et ablationem* mit der *Mystischen Theologie* des Pseudo-Areopagiten in Verbindung gebracht und gleichzeitig auf entsprechende Parallelstellen in *De docta ignorantia*, *De coniecturis*, *Idiota de sapientia* und *De non aliud hin-*

---

auf die Übersendung der Schrift über den Beryll drängten. Die Korrespondenz ist, soweit erhalten, von Vansteenberghede ediert worden: EDMOND VANSTEENBERGHE, *Autour de la docte ignorance* (Münster 1915) 120–123 / 133 / 134 / 139 / 140 / 144 / 150 / 158ff., hier: Brief 8, S. 120.

<sup>63</sup> F. NAGEL, *Entstehung der exakten Wissenschaften* (wie Anm. 22) 75.

<sup>64</sup> Vgl. hierzu auch den *Index nominum* in der Heidelberger Werkausgabe: h<sup>2</sup>XI/1, S. 121f.

<sup>65</sup> *De beryllo* wird am 18. August 1458 und noch in Buchenstein vollendet. Demnach muss Cusanus mit einer ersten Abfassung von *De mathematica perfectione* schon in Buchenstein und noch vor dem Spätsommer 1458 begonnen haben.

<sup>66</sup> K. REINHARDT, *Unbekannte Handschrift* (wie Anm. 42) 14.

gewiesen.<sup>67</sup> In der Toletaner Version nun zeigt sich, dass Cusanus diese Referenz sogar explizit benannt hat:

[...] *Magnus Dionysius deum oppositionem oppositorum nominat, quod non est nisi coincidentia seu equalitas. Nam equalitas illa innominabilis est forma essendi et sciendi et vivendi medio coincidentie oppositorum ante omnem positionem et ablationem.*<sup>68</sup>

Unter erneutem Bezug auf Dionysius-Areopagita verweist Cusanus schließlich noch einmal im weiteren Verlauf der Schrift auf die Bedeutung der *visio intellectualis* in den Grenzbereichen des rationalen Denkens. Die *visio*, bemerkt Cusanus, ermögliche dem menschlichen Geist den Übergang zum Bereich des Göttlichen.<sup>69</sup> Cusanus führt hier das erste Axiom der euklidischen *Elementa* an: Das gleiche geistige Vermögen, welches jedes vernunftbegabte Wesen erkennen lasse, dass der Punkt keine Teile hat, wie Euklid im ersten Axiom der *Elementa* festschreibt,<sup>70</sup> ermögliche es ihm auch, Einsicht in die Einfaltung aller Dinge in der göttlichen Weisheit zu erlangen.<sup>71</sup> Das euklidische *verbum* vom unteilbaren Punkt, aus dem alle geometrischen Figuren ausgefaltet werden, wird also in Analogie zum schöpferischen *verbum*<sup>72</sup> der unendlichen göttlichen Einheit gesetzt.<sup>73</sup> Die direkte Gegenüberstellung des »Fachmathematikers« Euklid und der theologischen Autorität des Dionysius-Areopagita kommt dabei einer personalen Allegorie gleich, die die erkenntnistheoretische Universalität der

<sup>67</sup> J. E. HOFMANN, *Vorform* (Anm. 4) 51 und Anm. 70f.

<sup>68</sup> *PM*, Cod. To. 19–26, fol. 191<sup>r</sup>.

<sup>69</sup> Ebd. Z. 303: *Visio autem intellectualis nominatur per magnum Dionysium transitio in deum.*

<sup>70</sup> Wahrscheinlich bezog sich Cusanus hier auf die bereits erwähnte Abschrift der *Elementa* in der Kueser Hospitalsbibliothek: Cod. Cus. 205<sub>15</sub>, fol. 134<sup>r</sup>–188<sup>v</sup>, hier: 134<sup>r</sup>: *Punctus est cuius pars non est linea.* In der Ausgabe nach Heiberg lautet die gleiche Stelle: *Punctum est, cuius pars nulla est* (Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐδέν)

<sup>71</sup> *PM*, Cod. To. 19–26, fol. 191<sup>r</sup>: [...] *Qui videt verbum hoc Euclidis, scilicet punctus est cuius pars non est, visione intellectuali perfecta, ille videt complicitate omnem [...] in sapientiam patris creatoris [...].*

<sup>72</sup> Cusanus bezieht sich auf Joh. 1,1: *In principio erat verbum*; vgl. hierzu auch: *De beryl*, h<sup>2</sup>XI/1, N. 42, Z. 15–17.

<sup>73</sup> Ebd. Z. 303–308: *Sicut, qui videt verbum hoc Euclidis, scilicet, punctus est cuius pars non est, visione intellectuali perfecta, ille videt complicitate omnem quam scripsit geometriam et transit in scientiam eius, sic transit in sapientiam patris creatoris ille, qui videt verbum, per quod fecit et secula, quoniam in verbo illo videt et omnia complicitate que sunt creata et creari possunt, et hec visio est transitio in sapientiam, qu[a]e deus est.*

*visio intellectualis* eindringlich versinnbildlicht. In *De beryllo* findet sich ein entsprechender Entwurf, wenngleich Cusanus hier Dionysius-Areopagita nicht ausdrücklich nennt.<sup>74</sup> Weitere Übereinstimmungen der beiden Schriften finden sich auch in Hinblick auf die cusanische Lichtmetaphorik. Im Schlusskapitel von *De mathematica perfectione* schreibt Cusanus:

*Visio igitur illa est lux rationis, sine qua omnis discursus est incertus et omnis motus ambiguus; nescit enim ratio sine ea, quorsum pertingat [. . .].*<sup>75</sup>

Dem entspricht in *De beryllo* die reflexive Formulierung:

*Quare Isaac [Israelii] dicebat quod »ratio oritur in umbra intelligentiae et sensus in umbra rationis,« ubi »occumbit« cognitio.*<sup>76</sup>

So wie also das sinnfällige Erkennen im rationalen Erkenntnisvermögen sein Urbild hat, so ist das Vermögen der rationalen Erkenntnis selbst im *intellectus* begründet. Die *visio intellectualis*, also das Erkenntnisvermögen des *intellectus* als höchste Stufe der Betrachtung, ist dann zugleich, wie Cusanus in *De mathematica perfectione* anmerkt, das »Werkzeug« der *theologia vera*. Mit der epistemologischen Bestimmung der wahren Theologie wird nun zwangsläufig eine grundsätzliche Frage aufgeworfen: Welche Rolle kommt dem Glauben in dem nahezu hermetischen epistemologischen System des Cusanus noch zu? Die Antwort des Cusanus steht ganz im Zeichen seines geistigen Konkordanzanspruchs und ist zugleich eine der bemerkenswertesten Stellen im gesamten Text:

*Nec [. . .] aliud videtur [intellectualiter] quam credebatur; ideo fides dirigit non in incertum, sed in certum, quod visione apprehenditur.*<sup>77</sup>

Der Glaube wird in der cusanischen Erkenntnislehre insgesamt, also auch im Bereich der Mathematik, keineswegs obsolet, sondern ist unbedingte Voraussetzung jeder wahren Erkenntnissuche. So ist der Glaube

<sup>74</sup> *De beryl.*, h<sup>2</sup>XI/1, N. 69, Z. 10–N. 70, Z. 3: Et ita evangelica doctrina manifestior fit, quae finem creationis ponit, ut videatur deus deorum in Sion in maiestate gloriae suae, quae est ostensiopatrnis, in quo est sufficientia omnis. Et promittit ille noster salvator [. . .] ipsum scilicet verbum dei, quomodo in illa die se ostendet et quod tunc illi vivent vita aeterna. Haec enim ostensio est cocipienda, ac si quis unico contuito videret intellectum Euclidis et quod haec visio esset apprehensio eiusdem artis, quam explicat Euclides in suis Elementis.

<sup>75</sup> *PM*, Cod. To. 19–26, fol. 191<sup>r</sup>.

<sup>76</sup> *De beryl.*, h<sup>2</sup>XI/1, N. 31, Z. 1–2.

<sup>77</sup> Cod. To. 19–26, fol. 191<sup>r</sup> = ed. Reinhardt, 141.



bei Cusanus auch Bedingung und Auslöser der intellektualen Erkenntnisstrebens: *Hinc vera Christi theologia fide initiatur*.<sup>78</sup> In *De beryllo* formuliert dies Cusanus so:

*Dico ego illa omnia sic esse addens quod cum hoc sit fidelis atque deo devotus, a quo illuminari crebris et importunis obtineat precibus. Dat enim sapientiam firma fide, quantum saluti sufficit, petentibus.*<sup>79</sup>

Was uns hier an noch recht allgemeinen erkenntnistheoretischen Überlegungen entgegentritt, wird in der umfangreichen Einleitung zur Vorform der *Mathematischen Vollendungen* auf bekannte Weise, nämlich *ex libellis docte ignorantie*, in den Kontext der cusanischen Grundauffassungen des Mathematischen und des Problems der Kreisquadratur gerückt.<sup>80</sup> Dabei bedient sich Cusanus entsprechend einer Vielzahl jener geometrico-theologischen Symbole, die auch das erste Buch *De docta ignorantia* kennzeichnen. Der Begriff des *circulus absolutus*, die Überlegungen zur *coincidentia oppositorum* am *angulus contingentiae* und am *orthogonius maximus* sind hier die bestimmenden Motive.<sup>81</sup> In die endgültige Fassung der *Perfectio* ist nur ein Bruchteil dieser Ausführungen übergegangen. Es handelt sich dabei um jene Passage in Cod. To. 19–26, in der Cusanus die Koinkidenz von Bogen und Sehne *im Kleinsten (in minimo)* behauptet:

*Adhuc considera, quod quanto arcus fuerit minor, tanto corda ei equalior. Et ideo si arcus fuerit simpliciter minimus, erit corda ei equalis [. . .].*<sup>82</sup>

In der endgültigen Fassung drückt Cusanus dies so aus:

*Necesse erit igitur, me recurrere ad visum intellectualem: qui videt minimam, sed non assignabilem cordam cum minimo arcu coincidere.*<sup>83</sup>

Auf der Grundlage der prägnanten textlichen Übereinstimmungen lässt sich vermuten, dass die später an *De mathematica perfectione* vorgenommenen Kürzungen direkt mit der Abfassung der Schrift *Über den Beryll* zusammenhängen. Mit ihr hatte Cusanus ein kompaktes und vergleichsweise leicht verständliches Kompendium seiner philosophisch-theologischen Konzeptionen geschaffen, auf das er, wie im Falle der späteren

<sup>78</sup> Ebd.

<sup>79</sup> *De beryllo*, h<sup>2</sup>XI/1, N. 72, Z. 6–9.

<sup>80</sup> *PM*, ed. Reinhardt, 134f. = Cod. To. 19–26, fol. 188<sup>r</sup>.

<sup>81</sup> Ebd.

<sup>82</sup> Ebd. 136 = Cod. To. 19–26, fol. 188<sup>v</sup>.

<sup>83</sup> *PM*, p 2, fol. 101<sup>r</sup> = *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 161–162.

Fassung von *De mathematica perfectione* für Kardinal de la Cerda, jederzeit verweisen konnte. Durch *De beryllo* wurden nach der Fertigstellung der Schrift über die *Mathematische Völlendung* die hierin ursprünglich angelegten Ausführungen zur Erkenntnislehre mehr oder weniger überflüssig, weshalb Cusanus sie in der endgültigen Fassung aussparen konnte. Gleichzeitig wurde so die fachmathematische Tragfähigkeit der Schrift über die *Mathematische Völlendung* nicht durch weitschweifende philosophische und theologische Diskurse in Frage gestellt. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch eine begriffliche Variante im Pariser Druck der Schrift. Dort findet sich die Bemerkung:

[...] *Mathematica perfectione qua mitto co[n]scripti, quatenus virtutem coincidentia ru[m] experimento ignotarum hactenus in theologicis inquisitionibus com[m]endare.*<sup>84</sup>

Hier wird ausdrücklich nicht von einem Koinzidenzprinzip, sondern von *Koinzidenzen*, gesprochen, also (in diesem Zusammenhang erstmalig) die Form des Plurals verwendet. Die *coincidentia oppositorum*, als Prinzip der vernunftgemäßen Schau, wird zu den mathematischen Koinzidenzen, als Emanationen des Koinzidenzprinzips in den Grenzbereichen des rationalen Denkens, in ein reziprokes Verhältnis gerückt. Das Koinzidenzprinzip der Theologie wird den mathematischen Koinzidenzen also gewissermaßen gegenübergestellt, die so eine prinzipielle Eigenständigkeit erhalten, die man schon fast *axiomatisch* nennen möchte.

Im rein Mathematischen bietet die Toletaner Handschrift gegenüber den späteren Fassungen nichts prinzipiell Neues. In der Kueser Handschrift der revidierten Fassung wie auch in den Drucken von Paris, Basel und Straßburg findet sich allerdings am Ende der *Perfectio mathematica* die folgende merkwürdige Ausführung zur Berechnung der Kugeloberfläche:

*Abscissionum sph(a)erae habitudo curvae superfciei ad rectam basis est ut lineae de zenith ad centrum basis cum semidiametro basis ad ipsam semidiametrum.*<sup>85</sup>

Nach Archimedes *De sphaera et cylindro* ist das hier behauptete Verhältnis  $\frac{\text{Kugelhaube}}{\text{Grundkreis}} = \frac{h+r}{r}$  falsch.<sup>86</sup> Cusanus muss aus dem *Corpus Cremoniensis* eigent-

<sup>84</sup> Ebd.

<sup>85</sup> *PM*, p 2, fol. 112<sup>r</sup>.

<sup>86</sup> Wenn sich nämlich nach Archimedes die Oberfläche einer Kugelhaube nach  $(h^2 + r^2) \cdot \pi$  berechnet, dann gilt die Verhältnisgleichung:

$$\frac{\text{Kugelhaube}}{\text{Grundkreis}} = \frac{h^2 + r^2}{r^2}$$

lich recht gut mit der Archimedischen Schrift vertraut gewesen sein. Die fehlerhaften Ausführungen in der Kueser Handschrift, die unverändert in die nachfolgenden Drucke eingeflossen sind, könnten natürlich auf die Flüchtigkeit der Ausarbeitung zurückgeführt werden. Cusanus hatte die für de la Cerda bestimmte Fassung innerhalb weniger Tage, in denen ihn ein krankes Bein ans Haus fesselte, zusammengeschrieben. Andererseits hat Cusanus zumindest die Abschriften für die Kueser Sammlung stets überprüft und bei Bedarf nachträglich kommentiert. Es ist also durchaus nicht ausgeschlossen, dass sich Cusanus auf eine verderbte oder fehlerhafte Vorlage bezogen, oder den Inhalt der archimedischen Abhandlung falsch aus dem Gedächtnis rekonstruiert hatte, sich seines Fehlers also zu keinem Zeitpunkt bewusst war. Die Toletaner Handschrift, in der der Satz über die Kugelhaube korrekt wiedergegeben wird, steht dem keineswegs entgegen. Es wäre ja durchaus denkbar, dass die fehlerhaften Ausführungen durch einen späteren Kopisten verbessert wurden. Es lässt sich nämlich nicht mit Sicherheit sagen, ob die Kueser Vorform der *Perfectio*, die Cusanus unzweifelhaft persönlich revidiert hat, den Satz über die Kugelhaube korrekt wiedergegeben hat, auch wenn sich einige schwache Indizien hierfür ausmachen lassen. In jedem Falle aber wäre ein zweiter, späterer Korrektor nicht mit dem Verfasser der Toletaner Abschrift identisch. Denn dieser, oder wahrscheinlich eher sein Auftraggeber, scheint vorrangig am philosophisch-theologischen Gehalt der Schrift interessiert gewesen zu sein. Dafür spricht vor allem Umstand, dass keine der hilfreichen Abbildungen, die sich in der Kueser Fassung finden, in die Toletaner Version übernommen wurden. Dies nun könnte zumindest ein erster Hinweis auf eine intermediäre Referenzquelle, eine dritte Kopie der Vorform *De mathematica perfectione* sein, die den falschen Satz über die Kugelhaube korrigiert wiedergegeben hat und dem Toletaner Schreiber als Vorlage diente. Für eine solche dritte Frühfassung der *Perfectio* spricht noch ein weiteres wichtiges Indiz: Wenn ein enger Zusammenhang zwischen der Abfassung von *De beryllo* und den massiven Kürzungen an *De mathematica perfectione* bestand, so wäre einem Kopisten der ursprünglichen Fassung nur ein sehr enges Zeitfenster für seine Abschrift geblieben. Schon im Herbst 1458 entsteht ja die gekürzte Version

---

nach: ARCHIMEDES, *Kugel und Zylinder*, in: ed. A. CZWALINA, (wie Anm. 13) 73–151, hier: Buch 1, § 42f., S. 126–128.

für Kardinal de la Cerda – also gut drei Jahre vor der wahrscheinlichen Abfassungszeit des Toletaner Kodex. Die Radierung in der Kueser Handschrift dürfte aber spätestens kurz nach der Übersendung der neuen Fassung vorgenommen worden sein. Wenn sich also klären lässt, wer den Auftrag für die Toletaner Version *De mathematica perfectione* gab, werden sich mit einiger Wahrscheinlichkeit auch Hinweise auf weitere Frühfassungen der Schrift finden.

In jedem Falle hat die *Perfectio* im Gesamtwerk des Cusanus eine weit wichtigere Rolle gespielt, als die endgültige Fassung der Schrift glauben macht. Neben *De beryllo* steht nämlich wenigstens ein weiteres philosophisch-theologisches Hauptwerk in enger Verbindung zur *mathematischen Vollendung*: 1463, ein Jahr vor seinem Tode, findet Cusanus in *De venetatione sapientiae*<sup>87</sup> noch einmal zur elementaren Geometrico-Theologie der frühen Jahre zurück. Die Schrift *Über die Jagd nach Weisheit* fällt in eine überaus produktive Zeit für den Kardinal, ist aber zugleich über weite Strecken Retrospektive. In ihr findet sich eine markante geometrische Analogieüberlegung zum Wesen der Trinität:

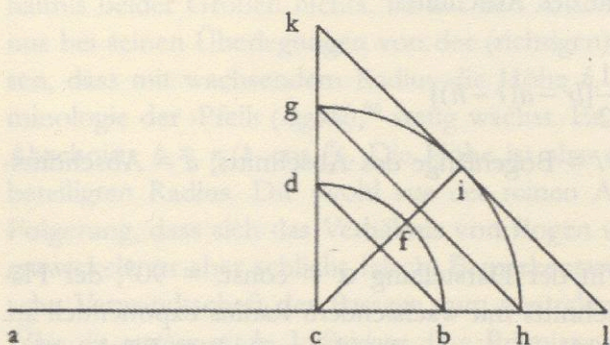
[. . .] *Quia omnis triangulis habet tres angulos aequales duobus rectis, et quilibet angulus ex dictis aequatur duobus rectis, aequatur igitur quilibet angulus omnibus tribus. Sic quilibet est aequalis alteri et aequalis aliis duobus et aequalis omnibus tribus; esset [hic triangulus] omnium figurarum figurabilium complicatio, ut principium, et resolutio, ut finis atque mensura praecisissima. [. . .] Clarius dicit sanctus Thomas in libello De aeternitate mundi sic aiens: <Cum enim ad omnipotentiam dei pertineat, ut omnem intellectum et virtutem excedat, expresse omnipotentiae derogat, qui dicit aliquid posse intellegi in creaturis, quod ad deo fieri non possit.> Igitur in ipso possesset actu aeterno video triangulum maximum sic se habere, ut praemittitur.<sup>88</sup>*

Der ganze Gedanke ist nicht neu und in einer Vielzahl von Abhandlungen des Cusanus anzutreffen. Ungewöhnlich ist allerdings die mathematische Detailliertheit mit der Cusanus sein Gleichnis einführt. Das ganze basiert auf einer Koinzidenzbetrachtung am eingeschriebenen Quadrat, allerdings vorgeführt am Kreissegment mit 45° Öffnungswinkel. Es bedarf keiner langwierigen Suche, um die Quelle der ganzen Überlegung auszumachen. Sie ist eine Variation der Konzeptionen zur iterativen Ausstreckung des Kreisbogens am Kreisektor aus *De mathematica perfectione*, was schon der Blick auf die Konstruktionsskizze und der zugehörigen Konstruktionsvorschrift offenbart.<sup>89</sup>

<sup>87</sup> *De venetatione sapientiae/ De apice theoriae*, h XII.

<sup>88</sup> *De ven. sap.* 26: h XII, N. 76, Z. 13–15 und N. 77, Z. 6–11.

<sup>89</sup> Abbildung nach: *De ven. sap.*: h XII, S. 72.



*Sit  $\cdot ab \cdot$  recta. Et super uno eius puncto, puta  $\cdot c \cdot$ , describe quartam circuli, cuius semidiameter, sit  $\cdot cb \cdot$ . Et trabe aliam semidiametrum  $\cdot cd \cdot$ . Et  $\cdot db \cdot$  arcus sit quarta, cuius medium sit  $\cdot f \cdot$ ; et trabe chordam  $\cdot db \cdot$ . Deinde continua  $\cdot cd \cdot$  et  $\cdot cb \cdot$  in infinitum. Et super  $\cdot c \cdot$  describe quartam circuli maioris, quae sit  $\cdot gh \cdot$ , cuius medium sit  $\cdot i \cdot$ . Et trabe ut prius chordam  $\cdot gh \cdot$  et trabe rectam circumscriptam arcui  $\cdot gh \cdot$ , quae sit  $\cdot kil \cdot$ .<sup>90</sup>*

Die Einzelheiten der Vorschrift sind hier nicht von Interesse.<sup>91</sup> Wichtig ist allein, wie Cusanus die Figur gelesen wissen will:

*Certum est,  $\cdot cdfb \cdot$  figuram triangularum habere circa centrum angulum rectum et circa arcum duos angulos, quorum quisque maior semirecto, quantum cadit supra chordam et infra arcum de angulis. Et quia in maiori circulo, scilicet  $\cdot cgh \cdot$ , anguli circa arcum sunt maiores quam in minori circulo (maior enim est angulus incidentiae super  $\cdot gh \cdot$  chordam cadens quam super chordam  $\cdot db \cdot$ ), – quare certum est, angulos illos ex semidiametro et arcu continue posse fieri maiores, quando arcus est maioris circuli [. . .].<sup>92</sup>*

Cusanus glaubt also, dass die Inzidenzwinkel zwischen Bogen und Sehne proportional zum Radius stetig zunehmen. Die metaphysische Absicht, die hinter der Überlegung steht, ist klar: Cusanus will auf die Koinzidenz von Kreisbogen, Sehne und Tangente hinaus. Wie aber steht es mit den mathematischen Implikationen? Joseph Ehrenfried Hofmann hat vermutet, dass die ganze Überlegung, auf die flächenhafte Winkeldefinition zurückzuführen ist, die Cusanus, im 15. Jahrhundert durchaus keine Ausnahme, als zulässig ansieht. Cusanus ist dabei überzeugt, den Inzidenz-

<sup>90</sup> *De ven. sap.* 26: h XII, N. 76, Z. 1–6. Die Textstelle wird in vollständigem Wortlaut ebenfalls wiedergegeben in: J. E. HOFMANN, *Mutmaßungen* (wie Anm. 4) S. 120.

<sup>91</sup> Ebd.

<sup>92</sup> Ebd. N. 75, Z. 7–14.

winkel über die Fläche des Kreisabschnitts bestimmen zu können. Dabei ist nun der Flächeninhalt des Abschnitts:

$$S = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi\alpha}{180} - \sin \alpha \right) = \frac{1}{2} [lr - a(r-h)]$$

(mit  $\alpha$  = Zentriwinkel,  $l$  = Bogenlänge des Abschnitts,  $a$  = Abschnittsehne)

Tatsächlich wächst, da in der Darstellung  $\alpha = \text{const.} = 90^\circ$ , der Flächeninhalt des Kreisabschnitts mit wachsendem Radius exponentiell an. Damit ist  $S_1$  (= Fläche  $\cdot dbf$ ) zwar in der Tat kleiner als  $S_2$  (= Fläche  $\cdot ghi$ ). Die Flächendifferenz steht aber nicht in funktionaler Abhängigkeit zum beteiligten Inzidenzwinkel, der im vorliegenden Fall mit  $\alpha = 90^\circ$  für alle Kreisabschnitte  $45^\circ$  beträgt.<sup>93</sup> Bei allen Schwierigkeiten, die sich der spätmittelalterlichen Mathematik noch beim Problem der Kontingenz- und Inzidenzwinkel stellten, hätte Cusanus die Unzulänglichkeit seiner Annahme aufgehen können. Aus dem dritten Buch der *Elementa* lässt sich klar entnehmen, dass die zugehörigen Abschnittswinkel für konstante Öffnungswinkel  $\alpha$  gleich sein müssen. Dabei spielt Frage nach Wesen und Größe der hornförmigen Winkel für Euklid zunächst keine Rolle. Es geht ihm nicht um eine irgendwie geartete zahlenmäßige Erfassung, sondern allein um die prinzipielle Vergleichbarkeit von Inzidenzwinkeln in einem trigonometrischen Zusammenhang. Wahrlich *kühn*, wie es Hofmann genannt hat,<sup>94</sup> setzt sich Cusanus mit seinen Überlegungen also über die maßgebliche Autorität Euklids hinweg – und gelangt prompt zu unzureichenden Schlussfolgerungen. Das Verhältnis von Kreisbogen und -sehne bleibt, unabhängig vom jeweiligen Radius des zum Segment gehörigen Grundkreises, unverändert, wie leicht einzusehen ist: Die Länge von Kreisbogen und -sehne lassen sich leicht bestimmen zu  $l = \frac{2r\alpha}{360}$  und  $a = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ . Die Relation beider Größen bleibt für konstante Öffnungswinkel  $\alpha$  gleich, denn aus  $2r \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x = \frac{2r\alpha}{360}$  folgt nach Kürzen  $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot x = \frac{\pi\alpha}{360}$  ( $= 0,008726 \cdot \alpha$ ) und damit nach Umformung  $x = \underline{\text{const.}} = \frac{0,008726 \cdot \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  ! Zwar wächst die absolute Differenz zwischen Kreisbogen und Sehne mit wachsendem Radi-

<sup>93</sup> Man könnte hier auch zur Vermeidung des Begriffs ›Inzidenzwinkel‹ mit dem ›Innenwinkel‹ operieren, der für einen Öffnungswinkel von  $90^\circ$  ebenfalls  $90^\circ$  beträgt.

<sup>94</sup> J. E. HOFMANN, *Mutmaßungen* (wie Anm. 4) 121.

us des Ausgangskreises an. Relativ betrachtet aber ändert sich am Verhältnis beider Größen nichts. Es hat den Anschein, als habe sich Cusanus bei seinen Überlegungen von der (richtigen) Annahme verleiten lassen, dass mit wachsendem Radius die Höhe  $h$ , in der cusanischen Terminologie der »Pfeil« (*sagitta*),<sup>95</sup> stetig wächst. Es gilt ja für die Höhe des Abschnitts  $h = r(1 - \cos \frac{\alpha}{2})$ . Die Höhe ist also direkt proportional zum beteiligten Radius. Die (wohl aus der reinen Anschauung gewonnene) Folgerung, dass sich das Verhältnis von Bogen und Sehne entsprechend entwickelt, ist aber schlicht falsch. Bemerkenswert ist nun die methodische Verwandtschaft der Passage zum zentralen Ansatz aus der Schrift *Über die mathematische Völlendung*. Die Prämisse seiner Überlegungen ist hier wie dort die flächenhafte Winkeldefinition und die Iteration am Kreissegment über die Kreissehne. Neben *De beryllo* entsteht also eine weitere große philosophische Abhandlung noch vier Jahre nach Abschluss des Quadraturtraktats unter dem Eindruck des mathematischen Durchbruchs, der Cusanus mit der *Perfectio mathematica* zweifellos gelungen war. Dass Cusanus in *De venatione sapientiae* den in der Quadraturschrift gefassten Konstruktionsansatz in geradezu fahrlässiger Weise modifiziert, ist für die herausragende Stellung, die *De mathematica perfectione* im Gesamtwerk einnimmt, letztlich ohne Bedeutung. Mit neuem Selbstbewusstsein, das selbst den Widerspruch zur fachlichen Autorität Euklids nicht scheut, widmet sich Cusanus ein Jahr vor seinem Tode noch einmal mit den Mitteln der Geometrico-Theologie den drängendsten Fragen seiner Einheits- und Unendlichkeitsmetaphysik. Jetzt, im Angesicht höchster Schaffenskraft, die in den vier vorangegangenen Jahren nicht weniger als fünf große Werke befördert hat, glaubt er zugleich den Rückblick wagen, die eigene Entwicklung, ganz im Sinne des Koinzidenzgedankens, in-eins schauen zu können. Die Quadraturfrage ist dabei noch einmal zum zentralen *aenigma* der Erkenntnissuche geworden. Sie ist das Analogon zur unendlichen Geschiedenheit von Gott und Welt auf der einen, des Menschen in all seinen Beschränkungen auf der anderen Seite. Wie nämlich in der *visio intellectualis*, der unendlichen Angleichung des Geistes an die höchsten Dinge, die Lösung des menschlichen Erkenntnisdilemmas im Angesicht metaphysischer Fragestellungen liegt, so

<sup>95</sup> Die Bezeichnung findet sich an verschiedenen Stellen im Quadraturtraktat *De mathematica perfectione*.

birgt die Kreisquadratur als Manifestation des Koinzidenzprinzips in der Denksphäre der *ratio* den Schlüssel für alle Grenzprobleme des schließenden Denkens. An der Lösung des Quadraturproblems, so glaubt Cusanus, hängt daher eine ganze Fülle von Grundlagenproblemen der mathematischen Wissenschaften:

[P]osse innumera correlaria elici etiam prius incognita, certum relinquo. Nam nec in sinibus et cordis elicis lineis describendis curvis et conicis superfici[e]bus, chilindris et sp[h]eris atque etiam musicis proportionibus et semitonis aut aliis quibusdam matbematic[a]e artis ingenis scibile latere potest praxim huius medii habenti.<sup>96</sup>

Dass Cusanus hier aus dem breiten Spektrum der *artes liberales* ausgerechnet das Sekundproblem der klassischen Harmonielehre hervorhebt,<sup>97</sup>

<sup>96</sup> *PM*, Cod. To. 19–26, fol. 190<sup>v</sup>.

<sup>97</sup> Das Sekundproblem stellt ein klassisches Dilemma des pythagoreischen Harmoniesystems dar und gründet sich auf den rechnerischen »Schwierigkeiten« bei der Teilung des reinen Ganztonintervalls mit der kennzeichnenden Proportion 9:8. Das Teilintervall lässt sich nicht mehr in ganzzahliger Proportion darstellen und genügt darin natürlich auch nicht mehr dem pythagoreischen Anspruch, dass das an sich Schöne sich in einfachen Verhältnissen mitteilen müsse. Dennoch führt der kleine Sekundeschritt zu einer deutlich hörbaren neuen Tonqualität, ist mehr als eine mikrotonale Schwankung. Das musste innerhalb der pythagoreischen Lehre, in der einerseits die Unterscheidung von »rechten« Intervallen und lediglich unreiner Intonation einerseits vorrangig Aufgabe des prüfenden Hörens war, andererseits das abstrakte Primat der einfachen »guten« Proportion galt, grundsätzliche Probleme aufwerfen. Die Unmöglichkeit der exakten Teilung des Ganztons führte schließlich zur ungleichen Intervallteilung in *Limma* und *Apotome*, eine systematische Unterscheidung, die erst durch das Aufkommen der temperierten Stimmung seit dem frühen 16. Jahrhundert aufgehoben wurde. Das pythagoreische *Limma* (auch: *Diesis*) wird durch das verbleibende Restintervall bestimmt, wenn von der pythagoreischen Quart, mit ihrer Intervallproportion von 4:3, zwei Ganztöne (Verhältnis 9:8) abgezogen werden. Es gilt also:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{243} (= 1,05349)$$

Zieht man nun das *Limma* vom pythagoreischen Ganzton ab, erhält man die *Apotome*:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243} = \frac{2187}{2048} (= 1,06787)$$

Einen guten Überblick zur klassischen griechischen Harmonielehre bietet: A. BARKER, *Greek Musical Writings 2: Harmonic and Acoustic Theory* (Cambridge 1989).



ist bemerkenswert. Selten hat sich Cusanus überhaupt musikalischen Fragestellungen gewidmet, und wenn, dann zumeist nur in sehr elementarem Sinne.<sup>98</sup> Man darf wohl annehmen, dass seine musiktheoretischen Kenntnisse über das im universitären *quadrivium* Dargebotene kaum hinausreichten. In der Kueser Bibliothek findet sich entsprechend kein einziges genuin musiktheoretisches Werk. Immerhin aber war Cusanus wohl mit der *Musica speculativa* des Johannes de Muris von 1323 vertraut. Dieses musiktheoretische Grundsatzwerk war nicht nur eine der maßgeblichen Quellen für die Vermittlung der boëthianischen *Institutiones musicae* im 14. und 15. Jahrhundert.<sup>99</sup> Sie weist in vielen kritischen Zusätzen, so beispielsweise in der Behandlung des Monochords, weit über Boëthius hinaus, wenngleich sich der innovative Geist des Franzosen in anderen Abhandlungen aus seiner Feder sehr viel deutlicher zeigt. Der kurze Verweis auf das Sekundproblem zu Beginn der *Perfectio* steht mit einiger Wahrscheinlichkeit in engem Zusammenhang mit diesem musikhistorischen Ausnahmewerk. Die Passage kann wohl nicht so zu verstehen sein, dass Cusanus die halbtonige Proportion mit der Kreiszahl gleichsetzt. Es geht ihm ausdrücklich um eine *Korrelation*, um die Herausstellung einer engen zahlentheoretischen Verwandtschaft inkommensurabler Größen überhaupt. Denn als solche hat Cusanus die Sekundproportion augenscheinlich angesehen. Darüber gibt unter anderem die ältere Abhandlung *De coniecturis* Aufschluss: Dort setzt er den Proportionsquotienten des kleinen Sekundintervalls mit der radizierten  $\sqrt{2}$  gleich<sup>100</sup> und folgt darin deutlich der Proportionslehre nach de Muris.<sup>101</sup> Dass Cusanus

<sup>98</sup> Dies zeigt sich unter anderem an der folgenden Stelle: *De doct. ign.* II, 1: h I, S. 62.

<sup>99</sup> Die Bedeutung der Abhandlung lässt sich schon daran ablesen, dass immerhin 44 mittelalterliche Handschriften der *Musica speculativa* erhalten geblieben sind.

<sup>100</sup> *De mente* 6: h<sup>2</sup>V, N. 91, Z. 3–10. Immo si adhuc acutius intueor, video numeri compositam unitatem, ut in unitatibus harmonicis diapason, diapente ac diatessaron. Harmonia enim habitudo unitas est, quae sine numero intelligi nequit. Adhuc ex abitudine semitonii et medietatis duplae, quae est costae quadrati ad diametrum, numerum simpliciorum intueor quam nostrae mentis ratio attingere queat, nam habitudo sine numero non intelligitur, et tamen numerum illum oportet esse pariter parem et imparem.

<sup>101</sup> Hier zitiert nach: CHR. FALKENROTH, [Beihefte zum Archiv für Musikwissenschaft 34:] *Die Musica speculativa des Johannes de Muris*. Kommentar zur Überlieferung und kritische Edition (nach der Hss. Ms. 1927 BB XXV 14 [ca. 1444], fol. 201<sup>v</sup>–205<sup>r</sup>, der Universitätsbibliothek Krakau) (Stuttgart 1992) 152, Z. 4–7: Et quod hoc sit simile, declaratur: Nam sicut diameter est maior costa et minor duabus, nulla tamen proportione

in *De mathematica perfectione* schließlich auch die Kreiszahl über die Sekundproportion indirekt mit der radizierten  $\sqrt{2}$  in ein analogisches Verhältnis gesetzt hat, kann durchaus als Hinweis darauf genommen werden, dass er bereits eine (wenn auch sicher sehr vage) Ahnung von der wesentlichen Ähnlichkeit der beiden (transzendenten) Zahlen hatte. Hierin eine Vorwegnahme infinitesimalmathematischer Konzepte zu sehen, wäre natürlich vollkommen verfehlt, zumal sich die Sekundproportion problemlos als Rationalzahl darstellen lässt und nur sehr grob mit  $\sqrt{2}$  angenähert werden kann. Es wird aber immerhin deutlich, als wie grundlegend Cusanus das Quadraturproblem angesehen hat. Am Gelingen der Kreisrektifikation hängt für ihn in *De mathematica perfectione* zugleich die Lösung einer ganzen Kette ähnlich gearteter mathematischer Probleme. Cusanus ist ganz offenbar überzeugt, dass die Quadraturfrage kein reines Spezialproblem darstellt, sondern der Ausgangspunkt zur Begründung einer gänzlich neuen mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode werden könnte. Wenn er selbstbewusst im Titel seines späten Quadraturtraktats die *Vollendung der Mathematik* ausruft, so meint er das im umfassendsten Sinne: Das prinzipielle Verfahren seines neuen Ansatzes zur Kreisquadratur glaubt er auf *alle anderen noch strittigen Probleme der Mathematik* ausdehnen zu können – einschließlich jener der Musiktheorie. Der musiktheoretische Exkurs innerhalb der *Perfectio* ist in dieser Hinsicht weit mehr als eine Randnotiz. Möglicherweise bietet er sogar einen Schlüssel für die häufig diskutierte Frage nach den frühesten Quellen der cusanischen Mathematik. Denn die Textkonkordanz zu de Muris lässt einigen Raum für Spekulationen über die universitären Hintergründe der mathematischen Kenntnisse des Cusanus: Der Name de Muris weist nach Padua und auf den Gelehrtenkreis um Prodocimo d’Beldomandi. Prodocimo hatte sich intensiv mit den Schriften des französischen Musiktheoretikers auseinandergesetzt und galt als ausgezeichnete Kenner der Materie. Die *Expositiones tractatus practice cantus mensurabiles Johannis de Muris*, die noch zu Lebzeiten Prodocimos in einer Vielzahl von Redaktionen kursierten,<sup>102</sup> geben darüber beredete Auskunft. De Muris Schriften

communi, quae posset excessum mensurare. Sic proportio toni maior est proportione sesquidecimasexta et minor duabus, et si minor est duabus sesquidecimisextis.

<sup>102</sup> Hierzu ausführlich: F. A. GALLO, *La tradizione dei trattati musicali di Prodocimo di Beldomandi*, in: *Quadrivium* 4 (1964) 57–84.

bildeten auch das Fundament der *Questiones de musica*, einer Art Kompendium des musiktheoretischen Denkens d’Beldomandis, die in der Handschrift Cod. Bibl. Nat. lat. 7372 der Pariser Nationalbibliothek erhalten geblieben sind und entweder von Prosdocimo in Zusammenarbeit mit seinem Schüler Biagio oder von letzterem allein in sehr enger Anlehnung an seinen Lehrer verfasst wurden.<sup>103</sup> Beldomandi hat sich auch eingehend mit dem Sekundproblem auseinandergesetzt und bringt es, was im vorliegenden Zusammenhang bedeutsam ist, vor allem mit Boëthius und de Muris in Verbindung.<sup>104</sup> Die Verbindungslinie über Johannes de Muris könnte für die Frage, ob Cusanus, wie immer wieder angenommen wurde, in Padua neben seinen Rechtsstudien Zeit und Muße für den Besuch der mathematischen Vorlesungen Beldomandis gefunden hat, von einigem Interesse sein. In jedem Falle wäre der Paduaner Lehrstuhl für Astrologie und Musik ein ausgezeichnete Ort gewesen, sich mit der neuen Musiklehre, die sich vor allem auf dem Werk de Muris gründete, vertraut zu machen. Dass Cusanus an musiktheoretischen Fragestellungen zumindest in soweit interessiert war, als sie sich für die Entwicklung seines Erkenntnisbegriffs urbar machen ließen, zeigt *De mathematica perfectione* in jedem Falle deutlich. In ihr erweist sich Cusanus wahrhaftig als ein, wenn auch nicht in jeder Hinsicht fachmännischer, so doch universal interessierter Geist.

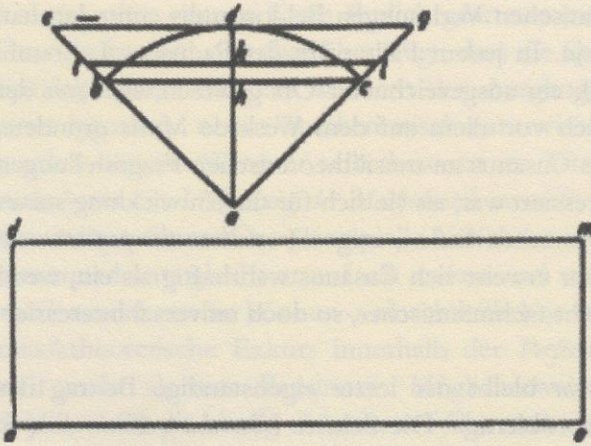
*De mathematica perfectione* bleibt der letzte eigenständige Beitrag des Cusanus zum Quadraturproblem.<sup>105</sup> Die Schrift *Über den goldenen Satz* in

<sup>103</sup> G. F. VESCOVINI, *Cusanus und das wissenschaftliche Studium in Padua zu Beginn des 15. Jahrhunderts*, in: M. Thurner (Hg.), *Nicolaus Cusanus zwischen Deutschland und Italien* (Berlin 2002) 93–114.

<sup>104</sup> PROSDOCIMO D’BELDOMANDI, *Libellus monochordi*, tractatus 1, cap. 4, in: E. Coussemaeker, *Scripotrum de Musica medii aevi*, Nova Series 3, 248–258, hier: 251f.: [...] Demonstrative probatum est per Boetium, Johannem de Muris et alios quamplurimos auctores musice, tonus nullo modo in duas partes [a]equales divisibilis est, sed potius in partes in[a]equales, quarum maior maius semitonium nupatur et minor minus semitonium apellatur. Propter quod dicunt musici semitonium dici non a semi quod est medium, sic quod semitonium importet tantum quantum medius tonus, quoniam hoc falsum est, ut ipsi demonstrant; sed dicitur a semi, quod est imperfectum, et sic tantum sonat semitonium quantum imperfectus tonus. Excessus vero quo maius semitonium minus excedit croma nominatur, quod croma nec totius toni, nec alicuius semintoniorum maioris scilicet et minoris pars aliquota existit, ut ipsi music[a]e auctores demonstrative declarant.

<sup>105</sup> Nach der Auffassung Hofmanns ließen Cusanus seine Verpflichtungen in der kurialen

der *Mathematik*,<sup>106</sup> die er am 8. August 1459 in Rom beendet und die seine letzte genuin mathematische Abhandlung werden sollte, stellt lediglich einen Sonderfall der allgemeinen Regel aus *De mathematica perfectione* dar. Neben den fachmathematischen Aspekten der Vorgängerschrift fasst sie aber auch noch einmal die philosophisch-theologischen Implikationen der *mathematischen Vollendung* zusammen, und es ist schon deshalb lohnenswert, noch in aller Kürze auf die wesentlichen Punkte der Schrift einzugehen. In mathematischer Hinsicht bietet die Abhandlung wie erwähnt nicht viel Neues. Den Kern der Abhandlung bildet die folgende Variation der Quadraturregel aus *De mathematica perfectione*:<sup>107</sup>



[...] Eandem teneant tres lineae  $\cdot ab$ ,  $\cdot ad$  et  $\cdot ac$  ad arcum terminantem habitudinem quam  $\cdot ab$ ,  $\cdot ah$  et  $\cdot ac$  ad  $\cdot bhc$  terminantem sive  $\cdot ac$ ,  $\cdot ad$  et  $\cdot ag$  ad  $\cdot edg$  terminantem. Quod idem est  $\cdot ac$  si diceretur: Sicut  $\cdot bdc$  arcus et quadrans et tres lineae  $\cdot ab$ ,  $\cdot ad$  et  $\cdot ac$  sunt tres semidiametri eius, sic  $\cdot edg$  est aequalis alicui quadranti et  $\cdot ac$ ,  $\cdot ad$ , et  $\cdot ac$  quantur tribus semidiametris circuli eius.<sup>108</sup>

Politik nach der Schrift über den *Goldenen Satz* keine Zeit mehr für weitere mathematische Studien: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 251, Anm. 1.

<sup>106</sup> *AP, Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 178–179 = Mailand, Bibl. Ambros., G 74 inf., fol. 18<sup>r</sup>.

<sup>107</sup> Abbildung nach: *AP, Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 178.

<sup>108</sup> *AP, Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 178–179 = Bibl. Ambros., G 74 inf., fol. 18<sup>r</sup>. Vgl. auch: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 251, Anm. 2.

Gemeint ist also (unter Zugrundelegung obiger Hilfsskizze) das Folgende:

$$\frac{\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{ac}}{\widehat{bdc}} = \frac{\overline{ab} + \overline{ah} + \overline{ac}}{bhc} = \frac{\overline{ad} + \overline{ae} + \overline{ag}}{edg} = \frac{6}{\pi} = \frac{(2r + \frac{r}{\sqrt{2}}) \cdot \sqrt{2}}{2r} = \frac{r + \frac{4r}{\sqrt{2}}}{2r}$$

mit  $\widehat{bdc}$  = Kreisbogen,  $bhc$  = Kreissehne,  $\overline{edg}$  = Tangente

Da  $\Delta abc$  und  $\Delta aeg$  ähnliche Dreiecke sind, ist von der Proportionalitätsbehauptung zumindest

$$\frac{\overline{ab} + \overline{ah} + \overline{ac}}{bhc} = \frac{\overline{ad} + \overline{ae} + \overline{ag}}{edg} \approx 1,9142135623 \dots$$

sicher erfüllt. Davon weicht nun allerdings

$$\frac{\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{ac}}{\widehat{bdc}} = \frac{6}{\pi} \approx 1,9098 \dots$$

deutlich ab. Während die Flächen, die von den drei von Punkt  $a$  ausgehenden Strahlen mit den unterschiedlichen Begrenzungsstrecken (also mit den verschiedenen Bögen oder Strecken) gebildet werden, variabel sind, bleiben die inneren Streckenverhältnisse stets konstant. Damit entspricht die *Dreieit der Strahlen (trinitas linearum)*, wie Cusanus darlegt, eigentlich einer *einfachen Größe (longitudo simplex)*. Im *Goldenen Satz in der Mathematik* wirkt letztlich also die Konzeption des *tres esse unum* aus der cusanischen Trinitätslehre, wie sie in *De docta ignorantia* formuliert ist, nach. Dass Cusanus den in seinen eigenen Schriften so deutlich spekulativ-philosophisch konnotierten Begriff der *coincidentia oppositorum* dabei (wohl bewusst) umgeht (er wählt statt dessen die etwas umständliche Formulierung des *transitus de contrario ad contrarium*),<sup>109</sup> fügt sich in das Gesamtbild der Schrift und vor allem in die Nachfolge der *Perfectio mathematica* schlüssig ein. In *Aurea propositio in mathematicis* setzt sich das bereits in der *Perfectio* nachweisbare Streben des Cusanus nach einer eigenständigen, stärker logisch-deduktiv begründeten Mathematik fort. Die Eignung zur metaphysischen Spekulation wird dem Quadraturproblem

<sup>109</sup> AP, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 178–179 = Bibl. Ambros., G 74 inf., fol. 18<sup>r</sup>.

dabei nicht abgesprochen. Diese kann sich für Cusanus aber nur dann vollends entfalten, wenn sie auf der Grundlage einer zunehmend rational begründeten Mathematik steht. Denn erst in der vollständigen Ausschöpfung seiner rationalen Möglichkeiten ist der Geist zum Überstieg in den Bereich der intellektualen Schau *notwendig* gezwungen und wird der Übergang zur *visio intellectualis* für den willigen Geist unausweichlich. Auch hier, im *Goldenen Satz in der Mathematik*, bleibt die prinzipielle Unterordnung des speziellen mathematischen Problems unter das eigentliche Ziel menschlichen Erkenntnisstrebens trotz aller Leidenschaft für mathematische Fragestellungen und den Fortschritten in der Sache das bestimmende Motiv des Cusanus. So beschließt er sein langes Ringen um das Quadraturproblem ganz als Theologe, wenn er resümierend vermerkt, dass *um den drei-einigen Urgrund [. . .] und um das Ausströmen der Dinge aus ihm die höchste Spekulation des Weisen verweilen wird.*<sup>110</sup> Blickt man von hier zurück auf die *Perfectio mathematica*, dann steht dem Betrachter wohl weniger die *»Vervollkommnung«* als vielmehr die *»Vollkommenheit«* der Mathematik als Mittel der höchsten Einsicht vor Augen. Diese Übersetzungsvariante wird dem bei allem Drang nach Originalitätssicherung doch stets selbstkritischen Denker Cusanus zumindest gerechter.

---

<sup>110</sup> AP, *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 5) 182 = Bibl. Ambros., G 74 inf., fol. 18<sup>r</sup>: Circa unitrinum igitur principium et rerum ab eo effluxum versabitur altissima sapientis speculatio.