DIE QUELLEN UND DIE BEDEUTUNG DER MATHEMATISCHEN WERKE DES NIKOLAUS VON KUES

Von Menso Folkerts, München

In einem Aufsatz aus dem Jahre 1966 schrieb Joseph Ehrenfried Hofmann, der bedeutendste Erforscher der mathematischen Schriften des Cusanus[1]:

> Der Versuch, die mathematischen Schriften des Nikolaus von Kues gerecht zu beurteilen, stößt auf nicht geringe Schwierigkeiten. Dem großen Denker und erfolgreichen Schriftsteller, der auf philosophischem Gebiet so viel Neuartiges von grundsätzlicher Bedeutung zu sagen hat, fehlte ersichtlich die hinreichende mathematische Schulung. Trotzdem enthalten auch die fachlichen Beiträge zum *Mathematischen* – sie beziehen sich freilich in erster Linie auf ein *spezielles* Problem, nämlich auf Fragen der Kreisquadratur – eine Fülle wertvoller Gedanken. Leider sind sie nicht mit der für den Fachmathematiker wünschenswerten Klarheit ausgesprochen, zeugen vielmehr nur von beachtlichem *Ahnungsvermögen.* Deshalb sind sie schon von Zeitgenossen wie Regiomontan und in noch weit stärkerem Maße von Späteren mißverstanden worden.

Dieser Meinung ist voll beizupflichten. Bei der Einschätzung der fachmathematischen Schriften des Cusanus kann es also nicht primär darum gehen, seine Ansätze und die Ergebnisse, die er erzielt hat, nach heutigen innermathematischen Kriterien zu bewerten; man muß sie vielmehr aus seinem Denkansatz und aus seinem fachlichen Wissen heraus beurteilen. Hierzu ist es nützlich, zu wissen, welche mathematischen Schriften ihm als Quellen zur Verfügung standen.

Dieser Aufsatz gliedert sich in drei Hauptteile. Vorweg gehen einige allgemeine Bemerkungen über die Bedeutung der Mathematik im Denken des Cusanus. Dies führt auch zur Beantwortung der Frage, warum er sich so eingehend mit den Beziehungen zwischen dem Kreis und geradlinig begrenzten Figuren und speziell mit der Quadratur und Rektifikation des Kreises beschäftigt hat. Er benutzte hierfür den isoperimetrischen Ansatz. Im ersten Hauptteil wird auf die Geschichte dieser Idee und auf mögliche Quellen eingegangen, aus denen Cusanus dieses Vorgehen kennengelernt haben kann. Im zweiten Teil sollen – unter Berücksichtigung der Werke in der Bibliothek des Cusanus – die fachmathe-

---

[1] Joseph Ehrenfried Hofmann, *Mutmaßungen über das früheste mathematische Wissen des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 5 (1966) 98–136; hier 98.

matischen Texte benannt werden, die ihm mit Sicherheit zur Verfügung standen. Im dritten Teil wird der Inhalt seiner mathematischen Schriften kurz charakterisiert. Dabei ist es nicht nötig, auf mathematische Details einzugehen, da man hierüber alles Wesentliche in den Arbeiten J. E. Hofmanns findet. Den Schluß bilden einige Bemerkungen über das Fortwirken der mathematischen Werke des Cusanus.

Über die Bedeutung der Mathematik in Cusanus' Denken ist so viel geschrieben worden, daß es genügt, einige kurze allgemeine Bemerkungen zu machen.[2] Zunächst einige Hinweise auf den philosophischen Hintergrund seines Denkens. Die Welt ist für ihn nicht mehr die Gesamtheit aller Dinge, die ihre jeweils bestimmten und bestimmenden Eigenschaften tragen, sondern die Welt hat für ihn den Charakter eines Netzes mit den Dingen als Verknüpfungen. Ausgehend von den Vorstellungen des Johannes Scottus Eriugena, glaubt Cusanus, daß das Wesen eines Dinges nicht erkannt werden kann. Vielmehr gilt es, den Bezug der Dinge untereinander zu betrachten. Dies leistet die herkömmliche Sprache der aristotelischen Logik nicht mehr.

Die neue Weltsicht führt Cusanus zwangsläufig zu einem neuen Erkenntnisbegriff. Maßstab für den Wert einer wissenschaftlichen Erkenntnis ist nicht mehr das genaue Erfassen der Wahrheit, sondern die Frage nach der Gewißheit, die Cusanus der Wissenschaft stellt. Einen zuverlässigen und genauen Maßstab sieht er in der Mathematik. Damit die Mathematik dies leistet, bestimmt Cusanus die Seinsweise der mathematischen Objekte neu.

Wie Platon sieht er die Welt des Mathematischen als völlig abgelöst von der Welt der Sinnendinge; er vertritt ebenfalls die These von der Reinheit, Genauigkeit und Unveränderlichkeit der mathematischen Wahrheiten. Auch für Cusanus darf der Geist bei seiner Beschäftigung mit der Mathematik nicht von der Sinnenwelt ausgehen. Doch mit seiner Aussage »Unser Geist erschafft die mathematischen Gegenstände«[3] geht

[2] Eine gute Darstellung des Mathematikverständnisses bei Cusanus findet man in Fritz Nagel, *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften*: BCG IX (Münster 1984) 57–63. Verwiesen sei auch auf Wolfgang Breidert, *Mathematik und symbolische Erkenntnis bei Nikolaus von Kues*, in: MFCG 12 (1977) 116–126 und Ulli Roth, *Die Bestimmung der Mathematik bei Cusanus und Leibniz*, in: Studia Leibnitiana 29 (1997) 63–80.

[3] *De beryllo*: h ^{2}XI/1, N. 55: ». . . mentem nostram, quae mathematicalia fabricat«; ähn-

er noch weiter. Die Mathematik hat für ihn also ihren Ursprung im menschlichen Geist.

Zusammenfassend können wir sagen:

– Der Geist darf bei seiner Beschäftigung mit der Mathematik nicht von den Sinnendingen ausgehen.
– Der Geist bewegt sich in einem eigenen Seinsbereich.
– Ausgehend vom eigenen Seinsbereich und mit sich selbst als Werkzeug kann der Geist die Mathematik erfassen.
– Dieses Erfassen erfolgt durch aktives geistiges Konstruieren.
– Die mathematischen Gegenstände haben kein selbständiges Sein; der Mensch kann sie als *creator assimilativus* hervorbringen.

Aus dieser neuen Auffassung vom Ursprung der Mathematik ergeben sich vier Konsequenzen:

1. Nach dem Grundsatz: Was ich selbst hervorbringe, das kann ich auch am besten erkennen, ist Cusanus nun in der Lage, Rechenschaft zu geben über den Ursprung der auffallend hohen Gewißheit mathematischer Aussagen. Daraus folgt, daß die Wahrheit in der Mathematik auf sicherere Weise erreicht werden kann als in den anderen Wissenschaften. Hier kommt Cusanus zu einer neuen erkenntnistheoretischen Verankerung der Gewißheit des mathematischen Wissens.
2. Cusanus teilt nicht die pythagoreische Auffassung von der Identität zwischen der mathematischen Ordnung und der Naturordnung. Da die Mathematik dem Seinsbereich des menschlichen Geistes angehört, ist sie nicht gleichbedeutend mit der Struktur der Welt, sondern wird zum Instrument des Menschen, um diese Struktur zu erfassen.
3. Aufgrund dieses Instrumentcharakters der Mathematik kann und muß sie ständig verfeinert werden. Hieraus folgt das Bestreben, die mathematischen Gesetze zu vervollkommnen.
4. Im Arbeiten mit der Mathematik erfährt der Mensch seine eigentliche Bestimmung. Er sieht sich als Schöpfer und versteht damit sein Dasein als Gottes Ebenbild.

---

lich *De docta ignorantia* I,5: h I, S. 13, Z. 6–7 (N. 14): »Numerus, qui ens rationis est fabricatum per nostram comparativam discretionem . . .«.

Cusanus gelingt es, seinen Gedanken von der Mathematik als freier Schöpfung des menschlichen Geistes in dieser Wissenschaft selbst nutzbar zu machen, indem er sich in seinen mathematischen Schriften ausschließlich mit einem einzigen Problemkreis beschäftigt: mit der Quadratur und Rektifikation des Kreises. Dabei entwirft er neue Ideen zur Lösung dieses alten Problems. Die Beschränkung der Themenwahl hängt mit der speziellen Problemstellung dieser Aufgaben zusammen, die seiner Ansicht nach seinen philosophischen Interessen in besonderer Weise entgegen kommen.

Die besondere Bedeutung der Kreisquadratur folgt auch aus einem anderen Ansatz, den man schon in *De docta ignorantia* findet: Um etwas Unbekanntes zu erforschen, muß man es mit Bekanntem vergleichen und Übereinstimmungen bzw. Unterschiede feststellen. Dies geschieht auch in der Mathematik, wenn man eine Proportion aufstellt. Cusanus folgert daraus, daß das Erkennen nicht ohne Mitwirkung von Zahlen zustande kommt. Einen ähnlichen Standpunkt haben bekanntlich schon die Pythagoreer und Platoniker vertreten.

Da das Unendliche kein Verhältnis zum Endlichen hat, ist es für uns nicht direkt erkennbar. Es gibt aber die Möglichkeit, es in einem Spiegel zu sehen oder in Symbolen zu untersuchen (*symbolice investigare*), wenn man die Mittel der Mathematik benutzt: indem man die Eigenschaften der (als endlich gedachten) Figuren betrachtet, kann man sich dem Unendlichen nähern.

Ein gutes Beispiel hierfür sind die Gegensätze des Geraden und des Krummen, die in der Mathematik durch die gerade Linie und den Kreis symbolisiert werden können. Aus der aristotelischen Tradition heraus war es nicht möglich, zwischen zwei gegensätzlich strukturierten mathematischen Objekten ein gemeinsames rationales Verhältnis zu bilden. Hier benutzt Cusanus sein Prinzip des Zusammenfallens der Gegensätze (*coincidentia oppositorum*), mit dem er die allgemeine Gültigkeit des aristotelischen Widerspruchsgesetzes bestritten hatte: Wenn der Radius eines Kreises immer größer wird, nimmt seine Krümmung ab, und er nähert sich immer mehr einer geraden Linie. In einer höheren geistigen Sicht kann die unendliche Gerade als Kreis mit unendlich großem Radius betrachtet werden. Im Unendlichen ist der im Endlichen bestehende Gegensatz zwischen Geradem und Krummem aufgehoben, und die *coincidentia oppositorum* ist erfolgt.

Ähnlich wie in der unendlichen Geraden die Gegensätze zwischen endlichen Figuren aufgehoben sind, so sind in Gott alle Gegensätze aufgehoben, die es in der Welt des Wahrnehmbaren und Denkbaren gibt. In der Unendlichkeit Gottes findet die *coincidentia oppositorum* für das Universum statt; Himmel und Erde fallen zusammen.

Diese Bemerkungen mögen genügen, um zu zeigen, warum sich Cusanus besonders für die Kreisquadratur und -rektifikation interessiert und immer wieder neue Ansätze geliefert hat, um sich ihr zu nähern.

I. Zur Geschichte des isoperimetrischen Ansatzes

Die wichtigsten Überlegungen zur Kreisberechnung, die bis zum 15. Jahrhundert angestellt wurden, stammen aus der griechischen Antike, vor allem von Archimedes. Wie wir sehen werden, hatte Cusanus Zugang zu den archimedischen Schriften. Sein mathematischer Ansatz unterscheidet sich aber wesentlich von dem des Archimedes und der vielen Autoren, die, durch ihn direkt oder indirekt beeinflußt, sich mit der Flächen- oder Umfangsbestimmung des Kreises beschäftigt haben. Archimedes' Idee war es, die Kreisfläche zu berechnen, indem er den Kreis durch ein- und umbeschriebene Vielecke approximierte. Das heißt: er beschrieb in den Kreis zunächst ein gleichseitiges Dreieck ein, dann ein Sechseck, Zwölfeck usw. bis zum 96–Eck. Die Fläche eines jeden dieser Polygone ist kleiner als die Kreisfläche, aber je größer die Eckenzahl ist, desto mehr nähert sich die Fläche des einbeschriebenen Polygons der Kreisfläche. Wir würden sagen: die Folge der Flächen der einbeschriebenen Polygone konvergiert von unten gegen die Kreisfläche. Entsprechend kann man eine Approximation von außen erhalten, indem man um den Kreis zunächst ein gleichseitiges Dreieck beschreibt, dann ein Sechseck, usw. Diese Folge der umbeschriebenen Figuren nähert sich dem Kreis von außen; die Differenz zwischen Polygon- und Kreisfläche kann beliebig klein gemacht werden, wenn man nur die Eckenzahl des Polygons hinreichend groß macht. Dieses Verfahren, das auch heute noch in ähnlicher Weise für Inhaltsbestimmungen verwendet wird, kann eine beliebig genaue Näherung für die Kreisfläche, also für die Kreiszahl π, liefern, wenn man bereit ist, einen entsprechend hohen Rechenaufwand zu leisten. Archimedes beschränkte sich in seiner »Kreismessung«

auf das ein- bzw. umbeschriebene 96–Eck. Durch geschickte Verwendung von Näherungswerten von Wurzeln (insbesondere $\sqrt{3}$) und durch korrektes Rechnen mit Ungleichungen gelang ihm der Nachweis, daß π zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. In seiner Nachfolge hat man noch bis zum 17. Jahrhundert bessere Näherungen für π ermittelt, indem man die Ekkenzahl der Polygone vergrößerte; im Prinzip unterschieden sich diese Verfahren nicht von dem des Archimedes.

Dieser Ansatz geht also von einem gegebenen, konstanten Kreis aus, den man durch Polygone annähert. Die Flächen der einbeschriebenen Polygone sind selbstverständlich immer kleiner, die der umbeschriebenen immer größer als die des Kreises.

Ein methodisch ganz anderer Ansatz besteht darin, regelmäßige Polygone verschiedener Eckenzahl zu betrachten, die immer denselben Umfang haben. Dies ist der isoperimetrische Ansatz. Man erkennt schnell, daß das Dreieck eine kleinere Fläche hat als das Viereck, dieses eine kleinere als das Fünfeck, usw. Das »größte« isoperimetrische »Vieleck« ist der Kreis. Man kann also die Kreisfläche als Grenzwert einer Folge isoperimetrischer Polygone mit wachsender Eckenzahl betrachten. Diesen isoperimetrischen Zugang zur Kreismessung hat Nikolaus von Kues gewählt. Alle seine Schriften handeln von einem Thema: der Beziehung zwischen regelmäßigen Vielecken, die denselben Umfang besitzen, und dem dazugehörigen isoperimetrischen Kreis.

Hier stellt sich die Frage, wie Cusanus zu diesem Ansatz gekommen ist. In der Literatur liest man überall, er habe diese Idee aus Thomas Bradwardines *Geometria speculativa* übernommen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß dies unwahrscheinlich ist. Hierzu ist es notwendig, kurz auf die Geschichte des isoperimetrischen Ansatzes einzugehen.[4]

Daß unter allen ebenen Figuren gleichen Umfangs der Kreis den größten Flächeninhalt hat, war den Griechen nicht nur bekannt, sondern

---

[4] Einen guten Überblick aus der Sicht des Mathematikhistorikers gibt Helmuth Gericke, *Zur Geschichte des isoperimetrischen Problems*, in: Mathematische Semesterberichte 29 (1982) 160–187; allerdings beschränkt er sich für das Mittelalter auf Bradwardines Beitrag. Zur Überlieferungsgeschichte der griechischen isoperimetrischen Texte siehe Wilbur R. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Boston / Basel / Berlin 1989), Part III, Chapter 10 (S. 689–751); zu den mittelalterlichen westlichen Texten siehe Ders., *Paraphrase Editions of Latin Mathematical Texts: De figuris ysoperimetris*, in: Mediaeval Studies 52 (1990) 132–189.

sie haben dies auch bewiesen. Ptolemaios bemerkt im *Almagest* (I 3) in Verbindung mit der Kugelgestalt der Erde: »Da ferner von den verschiedenen Figuren gleichen Kreisumfanges die Vielecke, welche mehr Ecken haben, die größeren sind, so hat von den ebenen Figuren der Kreis, von den Körpern die Kugel, und von allen übrigen Körpern die Himmelskugel an Größe den Vorrang.« Diese Stelle im *Almagest* hat dazu beigetragen, daß der griechische Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises erhalten ist. Er wird an drei Stellen überliefert:

- im Kommentar des Theon zum *Almagest*;[5]
- in Pappos' *Collectio*;[6]
- in einer anonymen Einleitung zum *Almagest*, dessen Verfasser umstritten ist: in Frage kommen Eutokios oder Arkadios.[7]

Alle drei Abhandlungen gehen auf dasselbe Original zurück, dessen Autor Zenodoros war.[8] Seine genaue Lebensdaten sind unbekannt; wir wissen nur, daß er nach Archimedes und vor Pappos gelebt haben muß.

Der griechische Text des Zenodoros in der Fassung des Anonymus wurde um 1160 direkt aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt. Von dieser Übersetzung mit dem Titel *De figuris ysoperimetris*, die aus sieben Sätzen besteht, sind acht Handschriften bekannt.[9] Sie war im 13. Jahrhundert im Umlauf und gab Anlaß zu sechs Bearbeitungen, die sich zum Teil in den Beweisen unterscheiden.[10] Einige dieser Bearbeitungen stammen aus dem Umfeld von Jordanus Nemorarius bzw. von John of Tynemouth (Johannes de Tinemue); der letztere verfaßte eine recht

---

[5] Zu Buch 1, Kapitel 3. Edition: A. Rome (Hg.), *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Tome II: Théon d'Alexandrie, Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste* (Città del Vaticano 1936) 354–379; lateinische Übersetzung: Friedrich Hultsch (Hg.), *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt.* 3 Bde (Berlin 1876–78). Hier: Bd. 3, 1189–1211.

[6] Im Anfang von Buch 5. Edition: Hultsch (wie Anm. 5) Bd. 1, 304–341.

[7] Edition in Hultsch (wie Anm. 5) Bd. 3, 1138–1165. Zur Autorenfrage siehe die Diskussion in Knorr, *Textual Studies* (wie Anm. 4) Part I, Chapter 7 (S. 155–211).

[8] Über den Zusammenhang zwischen den drei Bearbeitungen siehe Knorr, *Textual Studies* (wie Anm. 4) Part III, Chapter 10 (S. 689–751); die möglichen Abhängigkeiten sind in zwei Stemmata auf S. 725 veranschaulicht.

[9] Edition: H. L. L. Busard, *Der Traktat »De isoperimetris«, der unmittelbar aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt worden ist*, in: Mediaeval Studies 42 (1980) 61–88.

[10] Siehe die sorgfältige Analyse in Knorr, *Paraphrase Editions* (wie Anm. 4). Seine Ergebnisse sind auf S. 175–178 zusammengefaßt.

verbreitete geometrische Schrift mit dem Titel *De curvis superficiebus*, die in der Tradition von Archimedes' Kreismessung steht.[11]

Daß der anonyme isoperimetrische Traktat im Westen recht bekannt war, bezeugen auch Zitate aus dem 13. und 14. Jahrhundert. Jordanus Nemorarius und Roger Bacon erwähnen das Werk an mehreren Stellen.[12] Auch Autoren des 14. Jahrhunderts gehen auf die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises ein: Thomas Bradwardine hat sich in seiner *Geometria speculativa* mit dem isoperimetrischen Problem beschäftigt.[13] Offenbar war ihm der aus dem Griechischen übersetzte Text bekannt. Bradwardine hat allerdings einige Beweise durch anschauliche Argumentationen ersetzt, die von der mathematischen Beweisführung nach Art des Euklid weit entfernt, ja sogar teilweise fehlerhaft sind.[14] Um 1340 erwähnt Johannes de Muris in seiner Abhandlung *De arte mensurandi*, daß der Kreis unter allen Figuren das größte Fassungsvermögen hat. Er gibt keinen Beweis, sondern erläutert den Satz nur anhand eines Zahlenbeispiels.[15] Schließlich erwähnt auch Albert von Sachsen in seiner »Kreisquadratur« ein Buch *De corporibus ysoperimetris*.[16]

Es gab also verschiedene Quellen, aus denen Nikolaus von Kues den isoperimetrischen Ansatz, den er in seinen mathematischen Schriften konsequent verfolgt, kennenlernen konnte. Die Annahme, er sei durch das Studium von Bradwardines *Geometria speculativa* darauf aufmerksam geworden, ist keineswegs zwingend. Mit größerer Wahrscheinlichkeit kannte Cu-

[11] Zur Schrift *De curvis superficiebus* und zu ihrem Autor siehe Knorr, *Textual Studies* (wie Anm. 4) Part III, Chapter 8 (S. 595–615).

[12] Jordanus, *Liber Philotegni*, Satz 5 und Satz 30; siehe Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*. Vol. 5 (Philadelphia 1984) 200, 226. Roger Bacon: *Opus majus*: J. H. Bridges, *The ›Opus majus‹ of Roger Bacon. Edited, with introduction and analytical table.* 2 Bände + Supplement (Oxford 1897) 155 und *Communia Mathematica*: Robert Steele, *Communia mathematica fratris Rogeri. Opera hactenus inedita Rogeri Baconi*, Fasc. XVI (Oxford 1940) 44.

[13] In Buch 2, Kap. 4. Siehe hierzu Gericke, *Zur Geschichte* (wie Anm. 4) 175–178, und A. G. Molland, *An Examination of Bradwardine's Geometry*, in: Archive for History of Exact Sciences 19 (1978) 113–175; hier: 167–170.

[14] Siehe hierzu Molland, *An Examination* (wie Anm. 13) 169.

[15] In Kapitel 9. Der Text ist ediert in H. L. L. Busard, *Johannes de Muris, De arte mensurandi. A Geometrical Handbook of the Fourteenth Century* (Stuttgart 1998) 315f.

[16] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 1: The Arabo-Latin Tradition* (Madison 1964) 408.

sanus diese Idee aus der anonymen lateinischen Übersetzung von Zenodoros' Traktat oder aus einer Bearbeitung dieses Textes. Hierfür spricht auch eine andere Beobachtung: Einige Sätze über Kugel, Zylinder und Kegel, die Cusanus in *De geometricis transmutationibus* bringt, finden sich auch in *De curvis superficiebus.*[17] Wenn man berücksichtigt, daß die Abhandlung *De curvis superficiebus* öfters gemeinsam mit *De figuris ysoperimetris* überliefert wird, so ist es sehr wahrscheinlich, daß Cusanus eine Handschrift benutzt hat, die beide Texte enthielt; aus ihr kannte er den isoperimetrischen Ansatz, und aus der Schrift *De curvis superficiebus* übernahm er stereometrische Sätze in seine frühen mathematischen Schriften.

II. Mathematische Texte, die Cusanus zugänglich waren

Es wäre interessant, zu wissen, welche anderen fachmathematischen Schriften Cusanus gekannt hat. Während seines Studiums in Heidelberg hat er sicherlich die Standardtexte kennengelernt, die für den Unterricht im Quadrivium verwendet wurden, und ist auf diese Weise mit den Grundlagen der Arithmetik, Geometrie und Astronomie vertraut geworden.[18] Falls er in Padua bei Prosdocimo de Beldomandi Vorlesungen gehört hat,[19] wird er vermutlich auch dessen *Algorismus de integris* kennengelernt haben. Diese Schrift lehrt – wie die vielen anderen Algorismus-Traktate, die seit dem 12. Jahrhundert geschrieben wurden – das Rechnen mit ganzen Zahlen auf der Grundlage der indisch-arabischen Ziffern. Prosdocimos Schrift war übrigens nicht sehr verbreitet; erhalten sind nur drei Handschriften,[20] während es von dem bekanntesten Algorismus-Text, den Johannes de Sacrobosco schrieb, mehrere hundert Codices gibt.

---

17 Siehe hierzu im einzelnen Busard, *Der Traktat* (wie Anm. 9) 66f.

18 Zu Schriften, die die Heidelberger Studenten gemäß den Studienbestimmungen für die Artistenfakultät lesen mußten, siehe Marco Böhlandt, *Wege ins Unendliche. Die Quadratur des Kreises bei Nikolaus von Kues* (Augsburg 2002) 9f.

19 Zur Problematik dieser Annahme siehe Böhlandt, *Wege* (wie Anm. 18) 14.

20 Bologna, Civico Museo Bibliografico Musicale, A 56, p. 234–245; New York, Columbia University, Plimpton 186, fol. 1^r–21^v; Venedig, Museo Civico Correr, Cicogna 3747, fol. 135^r–145^v. Es gibt Drucke aus den Jahren 1483 und 1540.

Man kann darüber spekulieren, welche anderen fachmathematischen Schriften Cusanus benutzt hat. Mutmaßungen über sein frühestes mathematisches Wissen hat J. E. Hofmann in einem gleichnamigen Aufsatz angestellt.[21] Er ist den rein fachlichen mathematischen Hinweisen in Cusanus' frühesten philosophischen Schriften nachgegangen, nämlich *De docta ignorantia* und *De coniecturis*, und hat gezeigt, daß Cusanus um 1440 mit den einfacheren Teilen von Euklids *Elementen* vertraut war, ohne sich damals für die Details der Beweise interessiert zu haben. Hinweise auf die Idee der Isoperimetrie finden wir zu dieser Zeit noch nicht.

Weitere Aufschlüsse über Cusanus' mathematische Quellen lassen sich auf zwei Weisen gewinnen: indem man heraussucht, welche Autoren er in seinen mathematischen Schriften zitiert, und indem man die Handschriften analysiert, die im Hospital in Kues zu Nikolaus' Lebzeiten vorhanden waren.

An spezifisch mathematischen Autoren zitiert Cusanus in seinen mathematischen Schriften mit Namen nur Euklid und Archimedes. Mehrfach verweist er auf die Möglichkeit, zwischen zwei Strecken eine mittlere Proportionale einzuschieben – wir würden sagen, zu a und b das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ zu finden.[22] Diese Aufgabe wird von Euklid in Proposition VI.9[23] behandelt. In der *Quadratura circuli* erwähnt Cusanus zwei weitere Sätze aus Euklid: »Dreiecke mit gleicher Grundseite und Höhe sind flächengleich« (I.37) und »Bei Dreiecken mit gleichen Winkeln haben entsprechende Seiten dasselbe Verhältnis« (VI.4).[24] Weiterhin nennt Cusanus den Satz des Pythagoras (I.46)[25] und die Definition des Punktes zu Beginn der *Elemente*.[26]

---

[21] HOFMANN, *Mutmaßungen* (wie Anm. 1).

[22] *Quadratura circuli*: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften, übersetzt von Josepha Hofmann, mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hofmann* (Leipzig / Hamburg 1952; Neuauflage 1979) 58; *De complementis mathematicis*, ebd., 72 und 87; *De una recti curvique mensura*, ebd., 142; *Dialogus de circuli quadratura*, ebd., 149; *De caesarea circuli quadratura*, ebd., 159.

[23] Zählung hier und im folgenden nach Campanus.

[24] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 64 (beide Sätze).

[25] *De mathematicis complementis*; *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 70, ohne Nennung der Satznummer.

[26] I. Def. 1: »Punctus est cuius pars non est« (Vorform von *De mathematica perfectione*).

Archimedes, der wichtigste Autor, der sich mit der Kreisquadratur beschäftigt hat, wird von Cusanus an verschiedenen Stellen namentlich erwähnt. Bekanntlich hat Jacobus Cremonensis im Auftrag von Papst Nikolaus V. zwischen 1449 und 1453 fast alle archimedischen Schriften aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt.[27] Diese Übersetzung hat der Papst bald nach ihrem Abschluß Cusanus zugänglich gemacht, und er konnte sie für diejenigen mathematischen Schriften verwenden, die ab 1453 entstanden. Vor diesem Zeitpunkt waren ihm Archimedes' Gedanken nur durch Texte über die Kreisquadratur zugänglich, von denen seit dem 12. Jahrhundert eine größere Anzahl im Umlauf war.[28]

Nun zu mathematischen Texten, die Cusanus besaß oder die ihm jedenfalls zeitweise zur Verfügung standen. Im folgenden sollen nur Handschriften erwähnt werden, die heute noch in Kues vorhanden sind und dort vermutlich schon zu Lebzeiten des Cusanus existierten,[29] sowie Handschriften des Hospitals, die später verkauft wurden, zumeist nach England.[30] Erwähnt werden nur Handschriften, die mathematische Texte im engeren Sinne enthalten, nicht aber die zahlreichen Codices, in denen es nur astronomische oder astrologische Schriften gibt.

Cusanus besaß in seiner Handschriftensammlung das wichtigste mathematische Werk der Antike: die *Elemente* des Euklid.[31] Es handelt sich um die Bearbeitung, die Campanus von Novara kurz vor 1260 verfaßte. Dies war der verbreitetste mittelalterliche Euklidtext in Westeuropa. Campanus' Fassung zeichnet sich durch zahlreiche Zusätze aus, u. a.

---

[27] Zur Datierung der Übersetzung siehe M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 3: The Fate of the Medieval Archimedes 1300–1565* (Philadelphia 1978) 324f.

[28] Zu Cusanus' Kenntnis der archimedischen Schriften siehe die grundlegenden Bemerkungen in Clagett (wie Anm. 27) 297–315.

[29] Siehe den Katalog von Jakob Marx, *Verzeichnis der Handschriften-Sammlung des Hospitals zu Cues* (Trier 1905). Auf S. VI gibt Marx die Signaturen von Handschriften an, die nachweislich nicht aus der Bibliothek des Kardinals stammen.

[30] Siehe hierzu die gründlichen Arbeiten in den MFCG, die in Hermann Josef Hallauer, *Kritisches Verzeichnis der Londoner Handschriften aus dem Besitz des Nikolaus von Kues. Vorläufiger Abschluß. Habent sua fata libelli. Von der Mosel zur Themse: Handschriften des St. Nikolaus-Hospitals in der Bibliotheca Harleiana*, in: MFCG 17 (1986) 21–56, hier 21, aufgelistet sind. Auf S. 41–44 gibt es dort eine Übersicht über die Handschriften aus dem Hospital, die sich heute in der British Library befinden.

[31] Cod. Cus. 205, S. 13/14, fol. 134^r–188^v; siehe Marx, *Verzeichnis* (wie Anm. 29) 190–192.

über den Kontingenzwinkel, d. h. den Winkel zwischen Kreisumfang und -tangente.

Texte, die aus der Antike stammen, enthält auch der Codex Brüssel 10615–10729, der um 1150 entstand. Er überliefert neben Arats *Phaenomena*, Manilius' *Astronomica* und Vitruvs *De architectura* auch Auszüge aus den Schriften der Agrimensoren.[32] Die Handschrift enthält den Eigentumsvermerk des Hospitals und Randglossen von Cusanus.[33]

In der Mitte des 5. Jahrhunderts entstand der sog. *Calculus* des Victorius von Aquitanien, eine Tabelle für die Multiplikation der römischen Zahlen und der römischen Brüche. Dieses Werk erfüllte bis zum Aufkommen der indisch-arabischen Ziffern im 12. Jahrhundert eine wichtige Funktion für das Rechnen mit römischen Ziffern. Abbo von Fleury verfaßte Ende des 10. Jahrhunderts einen Kommentar dazu. Cusanus besaß in seiner Bibliothek eine Handschrift dieses Kommentars, die auch Exzerpte aus dem *Calculus* selbst enthält.[34]

In Verbindung mit Gerberts »Geometrie« gab es Anfang des 11. Jahrhunderts in Lothringen Diskussionen über geometrische Fragen, u. a. über die Winkelsumme im Dreieck und über die Definition von Innen- und Außenwinkel. Dieser sogenannte Winkelstreit wird in der Korrespondenz zwischen Radulph aus Lüttich und Regimbold aus Köln behandelt (um 1025). Die Diskussion um das Wesen der Winkel im Dreieck wird etwas später mit einem Text beendet, der in nur einer Handschrift überliefert ist, die sich in Kues befindet.[35] In ihm werden durch Aus-

[32] Auf fol. 36r–55v. Zum Inhalt siehe Roger Calcoen, *Inventaire des manuscrits scientifiques de la Bibliothèque Royale Albert Ier.* Tome III (Brüssel 1975) 37–39 (Nr. 303) und die genaue Beschreibung in Lucio Toneatto, *Codices artis mensoriae. I manoscritti degli antichi opuscoli latini d'agrimensura (V-XIX sec.). Tomo primo: Tradizione diretta. Il medioevo* (Spoleto 1994) 410–436.

[33] Siehe Emil Van de Vyver, *Die Brüsseler Handschriften aus dem Besitz des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 4 (1964) 325–335, hier 328, und Ders., *Marginalia van Nicolaus van Cusa in Bate-codex 217 en andere codices van de Koninklijke Bibliotheek te Brussel*, in: Tijdschrift voor Philosophie 18 (1956) 439–456, hier 445.

[34] Cod. Cus. 206, s. 11; siehe J. Marx, *Verzeichnis* (wie Anm. 29) 192f. Die Auszüge aus Victorius' Text stehen auf fol. Iv-IIr, der Kommentar des Abbo auf fol. 1r–42r.

[35] Cod. Cus. 190, s.12, fol. 1v–3r. Beschreibung der Handschrift in J. Marx, *Verzeichnis* (wie Anm. 29) 177f. Der Text ist ediert in J. E. Hofmann, *Zum Winkelstreit der rheinischen Scholastiker in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts*, in: Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Jahrgang 1942, Nr. 8.

schneiden und Aufeinanderlegen die wichtigsten Sätze über Gleichheit und Summe von Winkeln sozusagen experimentell bewiesen. Dieser anonyme Text war einem Lütticher Mönch namens Franco bekannt, der um 1045 eine Abhandlung zur Kreisquadratur schrieb.

Jetzt zu mathematischen Texten aus der Hospitalsbibliothek, die nach den Übersetzungen aus dem Arabischen entstanden.

Interessant ist die Handschrift Oxford, Bodleian Library, Lyell 52, die im 14. Jahrhundert geschrieben wurde und sich bis 1934 in Admont befand.[36] Sie enthält Schriften zur Arithmetik, Algebra und Astronomie, die auf Übersetzungen aus dem Arabischen zurückgehen. Zwei Texte sind Bearbeitungen der *Arithmetik* von al-Ḫwārizmī,[37] ein dritter ist eng verbunden mit der Abhandlung über das Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern, die Johannes de Sacrobosco im 13. Jahrhundert schrieb.[38] Der algebraische Text in dieser Handschrift beruht auf al-Ḫwārizmī; der Autor dieser Bearbeitung könnte Wilhelm de Lunis sein.[39] Der Codex endet mit den Planetentafeln des Azarchel (az-Zarqāllu)[40]. Zu diesen Tafeln gibt es Randglossen von der Hand des Cusanus. Auf welche Weise er Zugang zu diesem Codex bekam, ist nicht bekannt; Krchňák hält es für möglich, daß er zum Konzil nach Basel gebracht wurde, wo Cusanus ihn benutzen konnte.[41]

---

[36] Signatur: Admont 612. Beschreibung in Albinia De la Mare, *Catalogue of the Collection of Medieval Manuscripts Bequeathed to the Bodleian Library Oxford by James P. R. Lyell* (Oxford 1971) 143–146. Siehe Alois Krchňák, *Neue Handschriftenfunde in London und Oxford. Reisebericht*, in: MFCG 3 (1963) 101–108, hier 104f.

[37] Fol. 1^r–20^r: der sogenannte *Liber pulveris*, ediert in André Allard (Hg.), *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le Calcul Indien (Algorismus). Histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XII^e siècle* (Paris / Namur 1992); siehe dort S. XLI. – fol. 21^r–34^r: *Liber ysagogarum Alchoarismi*, Version II, ebenfalls in A. Allard, *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī* ediert; siehe dort S. XXXVII.

[38] Fol. 35^r–41^v: *Algorismus de integris*. Anfang des Textes in Lyell 52: »Cum hec scientia de numeris que algorissmus ab inventore.«

[39] Auf fol. 42^r–49^v. Inc.: »Unitas est principium numeri. Numerus enim est collectio unitatum.« Edition dieser Bearbeitung in Wolfgang Kaunzner, *Die lateinische Algebra in MS Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher MS Admont 612*, in: Günther Hamann (Hg.), Aufsätze zur Geschichte der Naturwissenschaften und Geographie (Wien 1986) 47–89.

[40] Auf fol. 50^r–72^v; auf fol. 73^r–75^v sind von einer späteren Hand weitere astronomische Tafeln hinzugefügt.

[41] A. Krchňák, *Neue Handschriftenfunde* (wie Anm. 36) 105.

Der Codex London, BL, Harley 3243, aus dem 14. Jahrhundert, enthält zahlreiche nominalistische Schriften, u. a. von Roger Nottingham, Walter Burley und Richard Killington.[42] Vorhanden ist auch (auf fol. 1^r–8^v) Thomas Bradwardines *Tractatus de proportionibus*. Auch wenn keine Einträge von Cusanus' Hand existieren, besteht die Vermutung, daß er die Handschrift besaß.

Von besonderer Bedeutung für Cusanus' mathematische Arbeiten war die Schrift *De quadratura et triangulatura circuli* von Ramon Lull (1232–1316). Cusanus besaß in seiner Bibliothek zahlreiche Schriften Lulls.[43] Der Codex 83 wurde im Jahre 1428 größtenteils von Cusanus selbst geschrieben. Zu den Texten in der Hand des Cusanus gehört auch die Einleitung von Lulls *De quadratura et triangulatura circuli*.[44] Wie Cusanus war auch Lull kein Fachmathematiker; ausgehend von der unmittelbaren Anschauung, versuchte er, aus seinen Figuren durch spekulative Deutung tiefere Zusammenhänge herauszulesen.[45] Lull vertrat – ebenso wie Averroes – die Meinung, daß Strecken und Kreisbögen sich nicht ins Verhältnis setzen lassen; man könne aber statt der wirklichen Strecken und Bögen ihre Ideen setzen und diese in der Vorstellung zum Vergleich bringen.[46] Die Anschauung führte Lull zu Vermutungen, die er mathematisch unterbauen wollte. Hierzu betrachtete er insgesamt 14 kongruente Kreise, die er mit einbeschriebenen regelmäßigen Vielecken in Beziehung brachte. Wegen seiner beschränkten geometrischen Fähigkeiten sind Lulls Darlegungen mathematisch unzureichend; er benutzt Sätze, zu denen er durch Probieren gekommen ist und die nicht korrekt sind.[47] Da Cusanus die Mathematik unter einem ähnlichen Gesichtswinkel sieht wie

---

42 Siehe die Beschreibung in Fritz Hoffmann, *Kritisches Verzeichnis der Londoner Handschriften aus dem Besitz des Nikolaus von Kues. Zweite Fortsetzung. Cod. Harl. 3243*, in: MFCG 8 (1970) 203–217.

43 In den Codices 37, 81–88 und 118.

44 Auf fol. 174^r–177^v. Beschreibung der Handschrift in Marx, *Verzeichnis* (wie Anm. 29) 83–86.

45 Siehe hierzu vor allem J. E. Hofmann, *Die Quellen der Cusanischen Mathematik I: Ramon Lulls Kreisquadratur*, in: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse. Jahrgang 1941/42, 4. Abhandlung (Heidelberg 1942), mit Edition der Einleitung.

46 J. E. Hofmann, *Die Quellen* (wie Anm. 45) 6f.

47 Die Einzelheiten sind in J. E. Hofmann, *Die Quellen* (wie Anm. 45) 7–14 gut dargestellt.

Lull, versteht man gut, daß Lull das Denken des Cusanus auch in diesem Bereich stark beeinflußt hat; speziell dürfte der bei Cusanus oft wiederkehrende Satz über die Inkommensurabilität von Kreisbogen und Sehne aus Lulls Schrift entnommen sein.

Cusanus besaß auch eine Handschrift der Sinustafeln, die Johannes de Lineriis im Jahre 1322 in Paris zusammenstellte. Das Exemplar in der Bibliothek des Hospitals, das vorwiegend Planetentafel enthält, wurde im 15. Jahrhundert von Nikolaus von Heybech aus Erfurt geschrieben.[48] In der Handschrift gibt es keine eigenhändigen Einträge des Cusanus zu den Tafeln.

Der Codex Kues 212, der zwischen 1416 und 1430 geschrieben wurde, gehört zu den wichtigsten naturwissenschaftlichen Handschriften in Cusanus' Bibliothek und verdient schon deswegen besondere Beachtung.[49] Er enthält zahlreiche zumeist astronomische Texte, u. a. die Alfonsinischen Tafeln und Abhandlungen über das Astrolab. Vorhanden sind aber auch drei arithmetische Schriften, die im 14. Jahrhundert verfaßt wurden. Zwei von ihnen wurden bisher nicht zur Kenntnis genommen, weil die Beschreibung im Handschriftenkatalog der Stiftsbibliothek völlig fehlerhaft ist.[50] Die erste ist die bekannte Abhandlung über gewöhnliche Brüche und Sexagesimalbrüche von Johannes de Lineriis.[51]. Daran schließt sich unmittelbar und ohne Nennung des Autors der *Algorismus proportionum* an, den Nicole Oresme zwischen 1351 und 1361 verfaßte;[52] dieser Teil der Kueser Handschrift entstand im Jahre 1418.[53] Oresmes *Algorismus proportionum* ist das früheste bekannte Werk, in dem

48 Cod. Cus. 213. Beschreibung des Inhalts in J. Marx, *Verzeichnis* (wie Anm. 29) 208f.; zur Geschichte siehe A. Krchňák, *Die Herkunft der astronomischen Handschriften und Instrumente des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 3 (1963) 109–180, hier 171–173. Die *Tabulae sinuum et cordarum* von Johannes de Lineriis befinden sich auf fol. 45^r–62^r.

49 Beschreibung in J. Marx, *Verzeichnis* (wie Anm. 29) 203–208; zur Geschichte siehe A. Krchňák, *Die Herkunft* (wie Anm. 48) 168–171.

50 Marx schreibt, auf fol. 297^r–309^r stehe ein *Tractatus proportionum*, und vermutlich sei Albert von Rickmersdorf (= von Sachsen) sein Verfasser. In Wirklichkeit handelt es sich um zwei völlig verschiedene Abhandlungen; siehe das Folgende.

51 Sein *Algorismus de minutiis*. Er steht auf fol. 297^r–303^r.

52 Auf fol. 303^r–309^r. Ediert in Maximilian Curtze (Hg.), *Der Algorismus proportionum des Nicolaus Oresme. Zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift R. 4°.2. der Königlichen Gymnasial-Bibliothek zu Thorn herausgegeben* (Berlin 1868) 13–30.

53 Siehe das Kolophon auf fol. 309^r.

die Multiplikation und Division von Proportionen mit ganzzahligen und mit gebrochenen Exponenten systematisch dargestellt wird. Es besteht aus einem Prolog und drei Teilen. Besonders erwähnenswert ist der dritte Teil, in dem Oresme auf reguläre Polygone eingeht. Er beweist eine Reihe von Sätzen über das Flächenverhältnis von Drei-, Vier-, Sechs- oder Achtecken, die dem Kreis einbeschrieben werden, zu anderen Polygonen, die umbeschrieben werden.[54] Der dritte Teil gipfelt in dem Satz, der zwar nur für das Acht- bzw. Viereck ausgesprochen wird, aber allgemein gültig ist: »Das in einen Kreis einbeschriebene reguläre $2n$-Eck ist die mittlere Proportionale zwischen dem um- und einbeschriebenen regulären n-Eck«. Auch wenn Oresme die ein- und umbeschriebenen Polygone nicht benutzt, um mit ihrer Hilfe die Fläche des Kreises zu bestimmen, könnte seine Schrift Cusanus beeinflußt haben, sich mit den Beziehungen zwischen dem Kreis und den ein- und umbeschriebenen Polygonen zu beschäftigen.

Bei der dritten Schrift im Codex Kues 212 handelt es sich um die *Arithmetica speculativa* von Johannes de Muris. Sie ist ein Kompendium der theoretischen Arithmetik, das in enger Anlehnung an Boethius' »Arithmetik« das auf die Pythagoreer zurückgehende Wissen über die Eigenschaften der ganzen Zahlen und ihre Beziehungen zueinander darstellt.[55] In der Kueser Handschrift enthält dieser Text zahlreiche Randnoten.[56] Sie betreffen u. a.: das Wesen der Mathematik; ihre Einteilung in »arithmetica speculativa« und »arithmetica practica«; den Inhalt der beiden Bücher der *Arithmetica speculativa*; einen Verweis auf eine Formulierung von »Dyonisius in sua arithmetica«, daß eine Menge »continua in se« oder »discreta in se« sein kann;[57] einen Hinweis auf den Unterschied zwischen »continua« und »discreta«: bei den »continua« gibt es keinen kleinsten

---

54 M. Curtze, *Der Algorismus* (wie Anm. 52) 24–30.

55 Vorhanden auf fol. 375r–382v. Edition des Textes in H. L. L. Busard, *Die »Arithmetica speculativa« des Johannes de Muris*, in: Scientiarum Historia 13 (1971) 103–132.

56 Ediert in H. L. L. Busard, *Die »Arithmetica speculativa«* (wie Anm. 55) 105–111.

57 Auf fol. 375r: »Dyonisius in sua arithmetica dicit quod quantitas continua est in se et suis partibus iuncta nec ullis finibus distributa ut lapis, lignum, sed discreta in se et partibus suis est divisa ut est grex et quod coadunatim est in unum redactum, ⟨ut⟩ consilium.« (H. L. L. Busard, *Die »Arithmetica speculativa«* [wie Anm. 55] 109). Busard weist darauf hin, daß sich eine ähnliche Formulierung auch am Anfang von Boethius' »Arithmetik« befindet. Die Vermutung liegt nahe, daß der Schreiber »Dyonisius« mit Boethius verwechselt hat.

Teil, wohl aber bei den »discreta«, bei denen es dagegen kein Größtes gibt.[58] Ob diese Randbemerkungen von Cusanus selbst geschrieben wurden, ist umstritten.[59] Sei dem, wie es wolle: sie geben Vorstellungen wieder, die auch Cusanus in verschiedenen Schriften äußert.

Fassen wir zusammen: Cusanus hatte Zugang zu den wichtigsten zu seiner Zeit bekannten mathematischen Schriften. Er kannte Euklids *Elemente* in der Bearbeitung des Campanus. Spätestens seit 1453 standen ihm Archimedes' Schriften in lateinischer Übersetzung zur Verfügung. Boethius' Vorstellungen über das Wesen der Zahlen waren ihm zumindest über die Bearbeitung von Johannes de Muris vertraut. Cusanus besaß eine Handschrift, in der das Multiplizieren mit römischen Ziffern und Brüchen dargestellt ist, und kannte auch Schriften über das Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern. Besonders geprägt haben ihn Ramon Lulls Abhandlung *De quadratura et triangulatura circuli* sowie die anonym zirkulierende Schrift über isoperimetrische Figuren; aus ihr, nicht aus Bradwardines *Geometria speculativa*, dürfte er sein Wissen über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises geschöpft haben.[60] Die Überlegungen im Isoperimetrie-Traktat, zusammen mit Lulls Ansatz, dürften Cusanus' Vorgehen bei der Behandlung der Kreisquadratur wesentlich bestimmt haben, viel stärker als die ganz andersartigen Vorstellungen des Archimedes, die er im übrigen erst ab 1453 im einzelnen nachvollziehen konnte, als er auf den isoperimetrischen Ansatz schon festgelegt war.

---

[58] Auf fol. 375r: »Differunt continua et discreta, quia in continua semper est (?) continua divisio, in minora non habet statum. Sed in discreta per appositionem unitatis erit status, quia dabilis est minimus numerus puta bynarius, non tamen maximus, et sic eciam est danda maxima quantitas ⟨continua⟩, non autem minima.« (H. L. L. Busard, *Die »Arithmetica speculativa«* [wie Anm. 55] 109).

[59] R. Haubst glaubte zunächst, Cusanus habe diese Notizen um 1420 selbst hinzugefügt; später hielt er es für unsicher, daß Cusanus sie geschrieben habe (briefliche Mitteilungen an J. E. Hofmann. Der Inhalt des ersten Briefs ist abgedruckt in H. L. L. Busard, *Die »Arithmetica speculativa«* [wie Anm. 55] 104f., Anm. 10).

[60] Hofmanns Versuch, den Nachweis zu führen, daß sich Cusanus auf Bradwardines Text bezieht (J. E. Hofmann, *Mutmaßungen* [wie Anm. 1] 129–132), überzeugt nicht. Viel näher liegt die Annahme, daß er sich auf eine Fassung der anonymen Isoperimeter-Abhandlung bezieht, aus der er den wesentlichen Sachverhalt entnehmen konnte, ohne die Beweise im einzelnen überprüfen zu müssen. Hofmann kannte die vielfältige Überlieferung der isoperimetrischen Texte im Mittelalter noch nicht.

III. Zum Inhalt der mathematischen Schriften des Cusanus

Kommen wir jetzt zu Cusanus' mathematischen Schriften. Man kann sie in drei Gruppen einteilen:[61]

– Die erste Gruppe umfaßt die drei Schriften *Transmutationes geometricae*, *Complementa arithmetica* und *De circuli quadratura* mit den *Transmutationes geometricae* als Hauptwerk. Sie sind zwischen 1445 und 1450 entstanden und gehören sachlich und gedanklich aufs engste zusammen. Cusanus bemüht sich, die Kreisquadratur konstruktiv und numerisch durchzuführen. Der isoperimetrische Ansatz ist zwar schon angedeutet, aber noch nicht zu einem eigenen Verfahren entwickelt.
– In den Jahren von 1453 bis 1457 entstanden vier weitere Schriften: die *Quadratura circuli*; dann als Hauptwerk *De mathematicis complementis*; ferner die kleineren Arbeiten *Declaratio rectilineationis curvae* und *De una recti curvique mensura*. Die Idee, umfangsgleiche Vielecke heranzuziehen, um den isoperimetrischen Kreis zu bestimmen, nimmt in diesen Schriften Gestalt an. Cusanus entwickelt Näherungsverfahren und benutzt Überlegungen, die auf Grenzübergänge hinsteuern. Die Kritik an seinem Ansatz veranlaßt ihn zu Diskussionen und Modifikationen.
– Schließlich entstanden von 1457 bis 1459 fünf weitere Arbeiten: neben dem Hauptwerk, der *Perfectio mathematica*, und einer Vorstufe dazu noch die kleineren Schriften *Dialogus de circuli quadratura*, *De caesarea circuli quadratura* und *Aurea propositio in mathematicis*. Cusanus versucht, die durch die Kritik der Fachleute aufgedeckten Mängel zu beheben. Er verfeinert die in den *Complementa mathematica* aufgezeigte Methode. Er bemüht sich darum, spekulativ motivierte Betrachtungen aus seinen früheren mathematischen Arbeiten durch ausschließlich rational begründete mathematische Schlüsse zu ersetzen.

1. *De geometricis transmutationibus* (abgeschlossen: 25. 9. 1445)

Schon um 1440 erwähnt Cusanus eigene Versuche zur Kreisquadratur,[62] und es könnte sein, daß seine Ansätze bis in die Kölner Zeit zurückrei-

[61] Diese Gliederung hat auch F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 63f., vorgenommen.

[62] In der Schrift *De coniecturis* II, 2, die um 1440 entstand, heißt es: »Temptavi ego aliquando affirmans quadraturam circuli per rationem inattingibilem atque inadmissibilem . . .« (h III, N. 83, Z. 1–4).

chen.[63] Die älteste erhaltene mathematische Schrift ist die Abhandlung *De geometricis transmutationibus*. Cusanus verfaßte sie im Jahre 1445 und widmete sie seinem Studienkollegen und Freund Paolo Toscanelli (1397–1482).[64] Schon hier stellt Cusanus ganz am Anfang fest, daß unter allen umfangsgleichen Figuren »bekanntlich« das Dreieck die kleinste und der Kreis die größte Fläche hat, »da eine isoperimetrische Figur umso mehr Fläche einschließt, je mehr Winkel sie hat«.[65] Cusanus gibt hier – wie auch sonst – keine Quelle an, aber nach dem oben Gesagten ist es wahrscheinlich, daß er sein Wissen aus dem auf Zenodoros zurückgehenden Isoperimetrie-Traktat schöpfte. Cusanus bemerkt, wenn man bei isoperimetrischen Polygonen die Eckenzahl erhöhe, komme man niemals zum Kreis selbst, ebensowenig, wie man beim Zählen zu einer größten Zahl gelange. Danach heißt es lapidar: »Kein Vieleck kann zum isoperimetrischen Kreis ein rationales Verhältnis haben«.[66] Hier ist wohl folgender Analogieschluß gemeint: Weil die »unendlich große« Zahl, der man sich nähert, niemals ein Verhältnis zu einer endlichen Zahl haben kann, ist es auch nicht möglich, daß der isoperimetrische Kreis ein rationales Flächenverhältnis zu irgendeinem umfangsgleichen Vieleck hat. Dies impliziert – ohne daß es gesagt wird –, daß der isoperimetrische Kreis nur näherungsweise konstruiert werden kann. Cusanus formuliert dann vier Prämissen, die er im folgenden näher ausführt:[67]

1) Zu einer gegebenen geraden Linie ist eine gleichgroße gekrümmte anzugeben.
2) Zu einer gegebenen geraden Linie ist eine andere gerade Linie anzugeben, die in demselben Verhältnis steht wie eine gekrümmte zu einer anderen gekrümmten Linie.
3) Zwischen gegebene Strecken sind zwei mittlere Proportionale einzuschieben.

[63] Hierauf könnte Cusanus' Abschrift von Lulls *De quadratura et triangulatura circuli* aus dem Jahre 1428 hindeuten.

[64] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 3–28.

[65] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 5.

[66] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 5.

[67] Formulierung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 6. Ausführung: ebd. 6–18.

4) Nach dem Verhältnis zweier gegebener Strecken ist zu einer dritten gegebenen Strecke eine vierte zu ermitteln.

Er behauptet, daß die beiden ersten Fragen neu seien; die dritte sei »nur von wenigen und unklar in Angriff genommen«, während die vierte »schon von vielen klar entwickelt« worden sei. Tatsächlich ist das dritte Problem, die Einschiebung zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebene Strecken, schon in der Antike mehrfach behandelt worden. Cusanus erwähnt eine dieser Lösungen, die Platon zugeschrieben wurde; sie benutzt bewegliche rechte Winkel. Diese Lösung wird im Eutokios-Kommentar zu Archimedes' Schrift *De sphaera et cylindro* überliefert. Vermutlich kannte Cusanus sie aber nicht aus dieser Quelle, sondern aus Johannes de Muris' Schrift *De arte mensurandi*.[68] – Die vierte Prämisse (Konstruktion der vierten Proportionalen) war tatsächlich allgemein bekannt; die Aufgabe wird schon bei Euklid (*Elemente* VI.12) gelöst.

Cusanus' Behandlung der beiden ersten Sätze ist interessanter, weil seine Ausführungen hierzu tatsächlich originell sind. In der ersten Prämisse geht er aus von dem gleichseitigen Dreieck *bdc*. Er unterteilt die Seite *bc* in vier gleiche Teile und erhält so die Punkte *e*, *f* und *g*. Dann – so behauptet Cusanus – gilt für den Radius *ah* des zum Dreieck isoperimetrischen Kreises: $ah : ae = 5 : 4$ (siehe Fig. 1). Wenn wir diese Näherung durchrechnen (was Cusanus nicht getan hat), so sieht man schnell, daß für π die Näherung $\frac{72}{5\sqrt{21}} = 3{,}1423376\ldots$ folgt. Im folgenden versucht Cusanus, Beweise für seine Vermutung zu geben. Die drei Begründungen sind in keiner Weise mathematisch exakt, aber im Ergebnis richtig;[69] Hofmann schreibt:[70] »Das ist . . . sicherlich nur das Ergebnis einer rein gefühlsmäßigen Betrachtung. Sie zeugt immerhin von vortreff-

[68] In Kapitel 7, Proposition 16; siehe die Edition in M. Clagett, *Archimedes* (wie Anm. 27) 19–30. Clagett zeigt auf (ebd. 300f.), daß Cusanus höchstwahrscheinlich den Text in *De arte mensurandi* benutzte und nicht die *Verba filiorum* der Banū Mūsā, in denen diese Lösung ebenfalls erwähnt wird.

[69] Siehe hierzu *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXIIf.; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende († 11. 8. 1464)*, in: Janus 51 (1964) 241–276, hier 254; Ders., *Nikolaus von Kues und die Mathematik*, in: Schweizer Rundschau 63 (1964) 398–403, hier 400; Ders., *Sinn und Bedeutung der wichtigsten mathematischen Schriften des Nikolaus von Kues*, in: NIMM, 385–398, hier 388. J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 10 (1973) 13–57, hier 16f.

[70] J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 254.

lichem Empfinden für funktionelle Zusammenhänge, die vom Kusaner noch nicht exakt erfaßt werden können.«

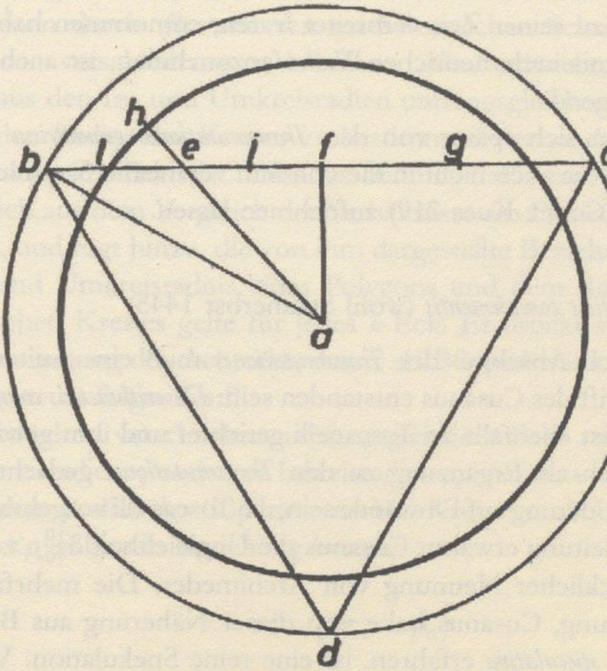

Fig. 1: Transmutationes geometricae (1445), 1. Prämisse, Teilfigur

Interessant ist besonders die 2. Prämisse, bei der es um die Feststellung des Streckenverhältnisses zweier Kreisbögen geht.[71] Cusanus gibt hier eine Näherungskonstruktion an, um das Verhältnis eines Teilbogens zu einem Viertelkreis zu bestimmen. Er hat sie ersichtlich durch Probieren gefunden. Die Darstellung ist recht dunkel. Wenn man sie aber richtig interpretiert, erkennt man, daß die Konstruktion eine recht gute Näherung liefert.

Nach der Behandlung der vier Prämissen folgen in *De geometricis transmutationibus* noch drei Kapitel (Über die Verwandlung von Linien ineinander; Über die Verwandlung von Flächen; Über die Verwandlung von Körpern).[72] Geometrie und Stereometrie, die in der Tradition des Ar-

[71] Siehe hierzu *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXIV-XXVI, und J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 254f.

[72] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 18–28.

chimedes stehen; u. a. weiß Cusanus, daß die Kreisfläche gleich dem halben Produkt aus Radius und Umfang ist.[73] Cusanus, der den Namen »Archimedes« nicht erwähnt, kann alle diese Sätze aus geometrischen Schriften, die zu seiner Zeit verbreitet waren, entnommen haben;[74] eine direkte Kenntnis archimedischer Werke anzunehmen, ist auch hier keineswegs zwingend.

Cusanus hat sich später von den *Transmutationes geometricae* etwas distanziert[75] und sie auch nicht in die von ihm veranlaßte Sammlung seiner Schriften (im Codex Kues 219) aufnehmen lassen.

2. *De arithmeticis complementis* (wohl Spätherbst 1445)

Sehr kurz nach Abschluß der *Transmutationes* muß eine weitere mathematische Schrift des Cusanus entstanden sein: *De arithmeticis complementis*.[76] Diese Arbeit ist ebenfalls an Toscanelli gerichtet und ihm gewidmet. Sie ist ausdrücklich als Ergänzung zu den *Transmutationes* gedacht und soll wohl eine Erwiderung auf Einwände sein, die Toscanelli vorgebracht hat.

In der Einleitung erwähnt Cusanus die Ungleichheit $3\frac{10}{70} > \pi > 3\frac{10}{71}$, unter ausdrücklicher Nennung von Archimedes. Die mehrfach geäußerte Vermutung, Cusanus habe von dieser Näherung aus Bradwardines *Geometria speculativa* erfahren, ist eine reine Spekulation. Viel wahrscheinlicher ist es, daß Cusanus eine Fassung von Archimedes' *Kreismessung* vor sich hatte. Diese Schrift war im 12. Jahrhundert aus dem

---

[73] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 21.

[74] Insbesondere aus Johannes de Muris' *De arte mensurandi*. Ähnliche Sätze gibt es auch in den *Verba filiorum* der Banū Mūsā, in Savasordas *Liber embadorum* und in Leonardo von Pisas *Practica geometriae*. Die Beziehung zwischen Kreisfläche und -umfang kann auf eine beliebige der vielen Bearbeitungen von Archimedes' »Kreismessung« zurückgehen, die im Umlauf waren. Näheres hierzu in M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 3* (wie Anm. 27) 301–306.

[75] Dies zeigen Äußerungen in der *Quadratura circuli* (*Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* [wie Anm. 22] 67 und 213, Anm. 18) und in *De mathematicis complementis* (ebd. 90f.).

[76] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 29–35. Zum Inhalt siehe ebd. XXVIIf.; *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 258; J. E. Hofmann, *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 389; J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 17f.

Arabischen übersetzt worden und gab in der Folgezeit die Veranlassung zu zahlreichen Bearbeitungen.[77]

In *De arithmeticis complementis* tritt uns ein neuer Gedanke entgegen, der sich dann durch alle weiteren mathematischen Schriften des Cusanus in den verschiedensten Variationen hindurchzieht, nämlich der Versuch, aus den In- und Umkreisradien umfangsgleicher regelmäßiger Vielecke den Radius des Kreises zu bestimmen, der zu dem jeweiligen Polygon isoperimetrisch ist. Cusanus benutzt dafür eine Proportionalität, die sich aus dem Vergleich der Verhältnisse am Dreieck und Sechseck ergibt, und fügt hinzu, die von ihm dargestellte Beziehung zwischen dem In- und Umkreisradius eines Polygons und dem Radius des isoperimetrischen Kreises gelte für jedes n-Eck. Er drückt sich allerdings bei der Behandlung des Achtecks, das er als Beispiel wählt, recht unklar aus. Gemeint ist folgendes:[78]

Man betrachtet verschiedene umfangsgleiche n-Ecke mit dem jeweiligen Umkreisradius r_n und dem Inkreisradius ρ_n. Cusanus nimmt an, daß zwischen dem Radius des isoperimetrischen Kreises und den beiden Radien r_n und ρ_n folgende Beziehung besteht:

$$r = r_n - \mu(r_n - \rho_n) \tag{1}$$

wobei μ eine Konstante ist, die nicht von n abhängt. Die Größe dieses μ berechnet er mit Hilfe des umfangsgleichen Dreiecks und Sechsecks und erhält (unter Berücksichtigung des Näherungswerts $\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}$) den Wert $\frac{1}{3}$. Hieraus folgt für uns sofort die Näherung

$$r \approx \frac{1}{3}(2r_n + \rho_n) \tag{2}$$

die das ganze weitere mathematische Schaffen des Cusanus beherrscht. Allerdings ist er in dieser Schrift noch nicht zu der allgemeinen Beziehung (2) vorgestoßen.

---

77 Der von Cusanus zitierte Satz bildet den Inhalt von Archimedes' »Kreismessung«, Proposition 3. Zu den möglichen Quellen, die Cusanus benutzt haben könnte, siehe M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 3* (wie Anm. 27) 306f.

78 J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 17f.

3. *De circuli quadratura* (Rieti, 12.7.1450)

Die dritte mathematische Schrift, *De circuli quadratura*, konnte Cusanus erst am 12. Juli 1450 in Rieti abschließen;[79] kirchenpolitische Fragen, u. a. die Wahl des neuen Papstes (Nikolaus V.) und die Ernennung des Cusanus zum Kurienkardinal (3. 1. 1449), ließen ihm keine Zeit, seine mathematischen Überlegungen früher niederzuschreiben.

In dieser Schrift geht Cusanus ausführlich auf die Frage ein, ob die Kreisquadratur im Rahmen der Denkweise der Mathematik seiner Zeit überhaupt lösbar ist.[80] Er betont, daß einige Fachleute die Kreisquadratur für möglich halten, andere aber nicht. Die Befürworter gehen davon aus, daß der Zwischenwertsatz[81] gültig ist; dann muß es ein zum Kreis flächengleiches Quadrat geben, weil das dem Kreis umbeschriebene Quadrat größer und das ihm einbeschriebene kleiner als der Kreis ist. Die Gegner leugnen die unumschränkte Gültigkeit dieses Satzes. Cusanus schließt sich keiner der beiden Positionen an, sondern entwickelt eine eigene Sicht, die nicht von einem mathematischen Axiom ausgeht, sondern von einem philosophischen Grundsatz, den er so formuliert:[82]

> Bei Dingen, die ein Größer und Kleiner zulassen, gelangt man nicht zu einem schlechthin Größten im Sein und in der Möglichkeit.

Cusanus unterscheidet zwischen der absoluten Gleichheit und einer Gleichheit, die einen Unterschied läßt, der kleiner als ein noch so geringer rationaler Bruchteil ist. Wenn man will, so kann man im zweiten Fall einen Vorgriff auf den Grenzwertbegriff des 19. Jahrhunderts sehen, den vor allem Cauchy entwickelt hat. Nach Cusanus ist die Kreisquadratur unmöglich, wenn man die absolute Gleichheit zugrunde legt; tut man dies nicht, so kann man sie erreichen, indem man Näherungslösungen findet.

---

[79] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 36–57. Zum Inhalt siehe ebd. XXVIII; J. E. Hofmann *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 389; F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 65–69.

[80] Siehe hierzu vor allem F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 65–69, der den Gedanken der »neuen Mathematik« betont, den Cusanus in dieser Schrift entwickelt.

[81] In der Formulierung des Cusanus: »Ubi est dabile magis et minus, est et dabile equale« (»Wo man ein Größeres und Kleineres geben kann, kann man auch ein Gleiches geben«).

[82] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 40. Der lateinische Text lautet: »In recipientibus maius et minus non devenitur ad maximum simpliciter in esse et posse.«

In Verbindung mit seinen grundsätzlichen Überlegungen geht Cusanus auch auf den Kontingenzwinkel ein, d. h. den Winkel zwischen Kreisbogen und Tangente. Dies ist ein Thema, das im Rahmen der Euklidinterpretation seit dem 13. Jahrhundert immer wieder diskutiert wurde, insbesondere auch von Campanus in seiner Euklidbearbeitung.[83] Bei der Frage der Quadrierbarkeit des Kreises spielt auch die Möndchenquadratur eine Rolle. Cusanus hatte offenbar Kenntnis von Texten, die letztlich auf Hippokrates von Chios zurückgehen. Dieser hatte schon im 5. Jahrhundert v. Chr. bewiesen, daß es gewisse durch Kreisbögen begrenzte Möndchen gibt, die in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden können. Somit hatte Hippokrates zwar nicht die Quadratur des Kreises geleistet, aber die Quadratur von bestimmten Flächen, die durch Kreisbögen begrenzt werden. Ein Text zur Möndchenquadratur war im 13. Jahrhundert aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt worden und veranlaßte weitere Abhandlungen zu diesem Thema, die recht verbreitet waren.[84]

Die Schrift enthält auch eine Berechnung, die auf dem in den *Complementa arithmetica* Gesagten beruht und letztlich auf die Näherungskonstruktion in den *Transmutationes* zurückgeht. Cusanus zeigt, daß sich der Kreisdurchmesser zum Kreisumfang wie $2\frac{1}{2}\sqrt{1575}$ zu $6\sqrt{2700}$ verhält. Dies liefert den Näherungswert $\pi \approx \frac{24}{35}\sqrt{21} = 3,1423$, der innerhalb der archimedischen Grenzen $(3\frac{1}{7}, 3\frac{10}{71})$ liegt. – Der symbolisch-mystische zweite Teil der Abhandlung hat starke Berührung mit ähnlich gehaltenen Ausführungen in *De docta ignorantia*.

Jetzt zu den Schriften, die zwischen 1453 und 1457 entstanden.

4. *Quadratura circuli* (wohl Sommer 1453)

In der *Quadratura circuli*[85] greift Cusanus den Gedanken wieder auf, den er schon in den *Complementa arithmetica* angedeutet hatte, nämlich die schritt-

[83] Ausgangspunkt war die Formulierung in Euklids »Elementen« (III. 16), daß der Winkel des Halbkreises größer und der Restwinkel kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel ist.

[84] Siehe M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. 1 (wie Anm. 16) 610–626, und Vol. 3 (wie Anm. 27) 1312–1321.

[85] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22)

weise Annäherung des Kreisradius durch die In- und Umkreisradien isoperimetrischer Vielecke.

Die Schrift ist nicht datiert. Gegen die frühere Ansicht, sie sei im Dezember 1450 entstanden, hat Fritz Nagel gewichtige Gründe vorgebracht, die es sehr wahrscheinlich machen, daß Cusanus sie im Juli oder August 1453 in Brixen niederschrieb.[86] In der Tat sind die inhaltlichen und textlichen Ähnlichkeiten zu den *Complementa mathematica* so evident, daß man die *Quadratura circuli* als Vorstufe der genannten Schrift auffassen muß.

Der *Quadratura circuli* kommt dadurch eine besondere Bedeutung zu, daß Cusanus hier zum erstenmal aus den funktionalen Beziehungen unter den Gliedern einer mathematischen Folge auf die Eigenschaften des Grenzwerts dieser Folge schließt. Dies ist allerdings noch nicht in mathematisch korrekter Form geschehen. Der zentrale Punkt ist die Vorstellung, daß der Flächenüberschuß des isoperimetrischen Kreises über das regelmäßige n-Eck (also $f - f_n$) proportional ist zum Streckenüberschuß des Umkreishalbmessers über den Inkreishalbmesser des n-Ecks (also $r_n - \rho_n$). Dies besagt, daß $(f - f_n) : (r_n - \rho_n) = \text{const.}$ für alle n ist. Cusanus deutet den Sachverhalt geometrisch an einer Figur für das gleichseitige Dreieck, das umfangsgleiche Viereck und den Radius des isoperimetrischen Kreises.[87] Hieraus kann man folgende Beziehung ableiten:

$$(r - \rho_3) : (r_3 - \rho_3) = (r - \rho_4) : (r_4 - \rho_4) \tag{3}$$

Cusanus geht, ähnlich wie in *De arithmeticis complementis*, davon aus, daß dieses Verhältnis konstant, also nicht von n abhängig, ist. Bezeichnet man

58–67. Zum Inhalt siehe ebd. XXXf.; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende († 11. 8. 1464)* (wie Anm. 69) 258–260; Ders., *Nikolaus von Kues und die Mathematik* (wie Anm. 69) 400f.; Ders., *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 390f.; J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 19–21. Ausführliche Analyse in F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 69–82.

86 F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 70–73.

87 Abbildung mit Deutung bei J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 259f., und J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 19f.

diesen konstanten Wert mit λ, so stützt sich Cusanus hier also auf den Ansatz

$$r = \rho_n + \lambda(r_n - \rho_n) \tag{4}$$

der dem früheren Ansatz (1) gleichwertig, aber geometrisch durchsichtiger ist.

Das Verfahren, das Cusanus vorschlägt, kann man verwenden, um die Zahl π mit vertretbarem Aufwand hinreichend genau zu bestimmen. Man kann aus seinem Ansatz eine Rekursionsformel ableiten, mit deren Hilfe schon beim 2^{17}–Eck die Zahl π bis auf neun Stellen genau berechnet werden kann.[88]

Im Vorwort dieser Schrift übt Cusanus Kritik an Archimedes; Cusanus wirft Archimedes vor, er habe in seiner Schrift über die Spirale eine »petitio principii« begangen, indem er ungleichartige Größen, nämlich Strecken und Bögen, ins Verhältnis gesetzt habe. Diese Kritik ist allerdings nicht berechtigt.[89] Wenn man die Datierung der Schrift auf das Jahr 1453 akzeptiert, so ist es sehr wahrscheinlich, daß Cusanus die Spiralenabhandlung des Archimedes aus der neuen Archimedes-Übersetzung kannte, die Jacobus Cremonensis um 1450 im Auftrag von Papst Nikolaus V. angefertigt hatte. Cusanus hätte sich über den Inhalt von Archimedes' Schrift über die Spirale aber auch durch eine Bearbeitung informieren können, die sich in Johannes de Muris' Abhandlung *De arte mensurandi* (um 1340) befindet.[90]

---

88 Siehe hierzu F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 80–82.

89 *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 59. Daß dieser Vorwurf unberechtigt ist, zeigt Hofmann ebd. 210, Anm. 6, und J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 20f. Cusanus wiederholt seinen Vorwurf in *De mathematicis complementis* und auch noch in *De mathematica perfectione*; siehe M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. 3 (wie Anm. 27) 308f.

90 In Kapitel 8; Edition dieser »Circuli quadratura« in H. L. L. Busard, *Johannes de Muris, De arte mensurandi* (wie Anm. 15) 298–314. Weil Clagett annahm, die *Quadratura circuli* sei schon 1450 entstanden, vermutet er, Cusanus habe Johannes de Muris' Schrift und nicht die Archimedes-Übersetzung durch Jacobus Cremonensis benutzt (M. Clagett, *Archimedes* [wie Anm. 27] 309f.).

5. *De mathematicis complementis* (1453/54)

Das mathematische Hauptwerk des Nikolaus von Kues ist *De mathematicis complementis.*[91] Es gibt zwei Fassungen: eine kürzere, die im Sommer 1453 entstand, und eine längere, die am 24. November 1454 in Brixen abgeschlossen wurde. Später hat Cusanus die ganze Schrift nochmals durchgesehen und Kleinigkeiten abgeändert; insbesondere hat er in der in seiner Bibliothek befindlichen Handschrift (Cod. Cus. 219) Zusätze angebracht, die zum Teil mit in den Text der späteren Abschriften und in die Drucke übernommen wurden. Die *Complementa* sind das wichtigste und gleichzeitig das verbreitetste Werk des Cusanus. Von der ersten Version gibt es sechs, von der zweiten acht Handschriften und vier Drucke.

Cusanus widmete die Schrift dem Papst Nikolaus V. und erwähnt ausdrücklich, daß dieser ihm die Archimedes-Übersetzung durch Jacobus Cremonensis »vor kurzem« (*proximis diebus*) zugänglich gemacht habe.[92] Aus dieser Übersetzung dürften drei Stellen aus Archimedes stammen, die Cusanus zitiert.[93]

Im 1. Buch der *Complementa mathematica* hat Cusanus die Ergebnisse seiner *Quadratura circuli* sorgfältig dargelegt. Die Flächenproportionalität wird in eine etwas andere Form gebracht. Cusanus wiederholt den schon in der *Quadratura circuli* geäußerten Einwand gegen Archimedes' Kreisrektifikation mit Hilfe der Spirale. Auf die 13 Sätze folgen vier Anwendungsbeispiele. Erwähnenswert ist der Vorschlag des Cusanus, für Konstruktionen Instrumente zu verwenden, bei denen feste Winkel in Erz oder Holz abgebildet sind.[94]

---

[91] Deutsche Übersetzung *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 68–127. Zum Inhalt siehe ebd. XXXI-XXXV; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 261f.; J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 21f.

[92] Im Vorwort heißt es u. a.: »Jüngst erst hast Du mir die geometrischen Schriften des großen Archimedes übermittelt, nachdem sie durch Dein Bemühen aus dem Griechischen, wie sie Dir zugegangen sind, ins Lateinische übertragen waren« (*Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* [wie Anm. 22] 68).

[93] Ein Satz stammt aus der »Parabelquadratur«, die anderen beiden aus der Schrift »Über Kugel und Zylinder«; siehe M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. 3 (wie Anm. 27) 298f.

[94] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 86f., 91.

Eine Abschrift dieser Abhandlung erhielt auch Toscanelli. Er äußerte zahlreiche Einwände, die in einem durch Zufall erhaltenen Schreiben niedergelegt sind, das wohl im Winter 1453/54 entstanden ist.[95] Sein Kritikpunkt, daß die Flächenproportionalität des Hauptsatzes nicht erwiesen sei, ist berechtigt. Toscanellis Schreiben an Cusanus schickte dieser zusammen mit einer Abschrift der *Quadratura circuli* und mit anderen Entwürfen an Georg Peurbach. Nach dessen Tod ging das Konvolut in Regiomontans Besitz über, der es kritisch durchsah; hierzu siehe S. 329.

Veranlaßt durch Toscanellis Kritik, fügte Cusanus seiner Schrift noch ein zweites Buch hinzu. Es ist nicht straff gegliedert, sondern enthält zahlreiche Einzelheiten. Sie sind für sich gesehen interessant, jedoch mangelt ihnen der übergeordnete und einheitliche Gesichtspunkt. Es gibt Bemerkungen zur Bewegungslehre, die Übertragung isoperimetrischer Sätze von der Ebene auf den Raum, Überlegungen zur Rektifikation von Bögen und Kreisquadraturen mit Hilfe der Möndchen. Ohne in Einzelheiten zu gehen, soll nur bemerkt werden, daß Cusanus hier eine Vertrautheit mit der Lehre von den Formlatituden zeigt, die man z. B. in Nicole Oresmes *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* findet.[96] Hofmann äußert sich zu dem 2. Buch von *De mathematicis complementis* folgendermaßen:[97] »Im ganzen gesehen, ist dieser zweite Teil der *Complementa mathematica* eine sehr anstrengende Lektüre; er ist schlecht komponiert und in den Einzelheiten flüchtig ausgeführt – so flüchtig, daß der Sinn der Sache manchmal kaum erkannt werden kann. Wir brauchen uns nicht zu wundern, daß der gedankliche Inhalt fast völlig unbeachtet blieb.«

6./7. *Declaratio rectilineationis curvae* und *De una recti curvique mensura*

Vielleicht veranlaßt durch die Kritik an den *Complementa mathematica*, entstanden zwei weitere kleine mathematische Schriften. Sie wurden wahr-

[95] *Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum Cardinalem*; deutsche Übersetzung in *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 69) 128–131. Zum Inhalt siehe ebd. XXXIIf.; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 261; J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 22–24.

[96] Hierauf hat Böhlandt, *Wege* (wie Anm. 18) 91, hingewiesen.

[97] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXXV.

scheinlich schon bald nach den *Complementa mathematica*, jedenfalls vor dem *Dialogus de circuli quadratura* geschrieben; eine genauere Datierung ist nicht möglich. Die erste trägt den Titel *Declaratio rectilineationis curvae.*[98] Sie ist für Peurbach bestimmt und will eine Kreisrektifikation aus den *Complementa mathematica* erklären.[99] Über die Zeit der Abfassung wissen wir nichts.

Ähnliches gilt für die Studie *De una recti curvique mensura.*[100] Sie erweckt den Eindruck, als sei sie eine Überarbeitung eines früheren Versuches zur Kreisquadratur. Ihr Inhalt ist nicht sehr bedeutend.

Mit dem Jahr 1457 setzt eine neue, letzte Phase der mathematischen Aktivitäten des Cusanus ein. Seine letzten Schriften zeigen im Detail etwas andere Ansätze. Hofmann hat diese Phase als »Wendung von der transzendenten zur rationalen Schlußweise« bezeichnet.[101] Die in dieser Zeit entstandenen Schriften sollen ebenfalls kurz charakterisiert werden.

8. *Dialogus de circuli quadratura* (Brixen, wohl 1. Hälfte 1457, jedenfalls vor 6. 8. 1457)

Der *Dialogus de circuli quadratura*[102] stellt eine wissenschaftliche Unterredung zwischen Cusanus und Toscanelli dar – ob sie wirklich stattgefunden hat oder fiktiv ist, wissen wir nicht. In dieser Schrift, die wahrscheinlich in der ersten Hälfte des Jahres 1457 entstand, gibt Cusanus das bisherige Vorgehen auf, wie man es etwa in den *Complementa mathematica* findet. Ausgangspunkt ist jetzt ein neuer Satz (siehe Fig. 2):

> Gegeben der Kreis um a durch b und c. Das zu diesem Kreis umfangsgleiche gleichseitige Dreieck hat einen Umkreisdurchmesser, der gleich der Summe der Strecken ab und bc ist. (D.h.: $d = r + r\sqrt{2}$.)

---

[98] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 132–135. Zum Inhalt siehe ebd. XXXIV.

[99] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 104–108.

[100] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 136–142. Siehe auch ebd. XXXVf.

[101] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXXVII.

[102] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 143–150. Zum Inhalt siehe ebd. XXXVI, und J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 262.

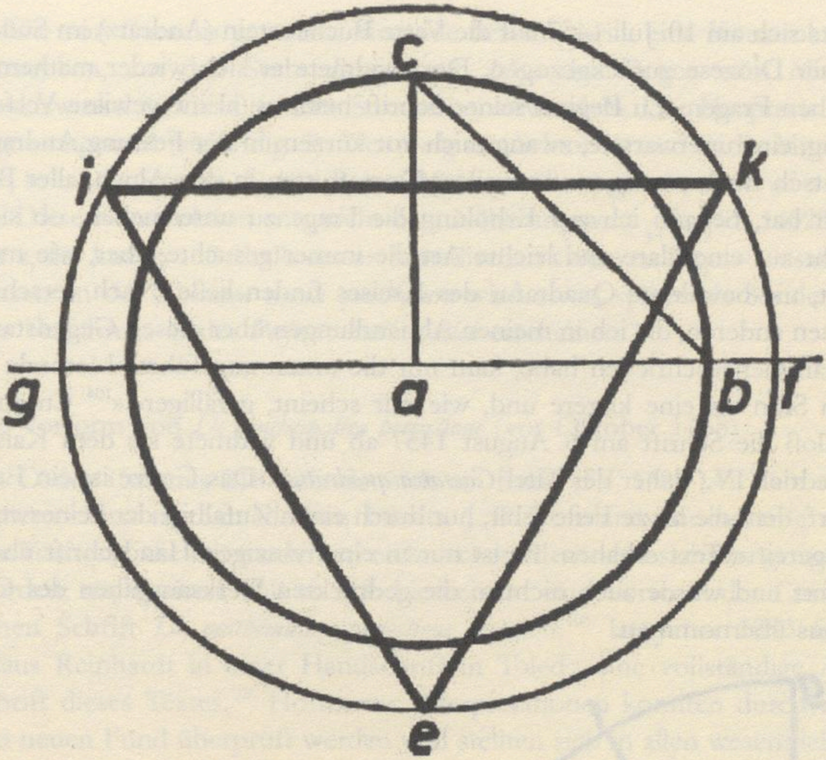

Fig. 2: *Dialogus de circuli quadratura* (1457), Hauptfigur

Dieser Ansatz führt zu dem relativ schlechten Näherungswert $\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2}) = 3,1361\ldots$ für π. In Cusanus' Beweisverfahren durch Iteration kann man einen frühen Versuch eines direkten Grenzübergangs sehen.

9. *De caesarea circuli quadratura* (Buchenstein, 6. 8. 1457)

Die kleine Schrift *De caesarea circuli quadratura*[103] ist eine Antwort des Cusanus auf Toscanellis Kritik an den *Complementa mathematica*. Cusanus

[103] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 151–159; Edition: Daniela Mazzuconi, *Il »De cesarea circuli quadratura« e l'»Aurea propositio in mathematicis« di Niccolò Cusano*, in: Italia medioevale e umanistica 23 (1980) 49–76, hier 67–72. Zum Inhalt siehe *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie

hatte sich am 10. Juli 1457 auf die Veste Buchenstein (Andratz) im Süden seiner Diözese zurückgezogen. Dort widmete er sich wieder mathematischen Fragen. Zu Beginn seiner Schrift heißt es: »Eine gewisse Verfolgung, eine unerwartete, zwang mich vor kurzem in der Festung Andratz, deutsch Buchenstein, zu verweilen. Dort, mitten in den Alpen, aller Bücher bar, begann ich zur Erholung die Frage zu untersuchen, ob sich nicht auf eine klare und leichte Art die immer gesuchte, aber, wie man sagt, nie bewältigte Quadratur des Kreises finden ließe. Nach verschiedenen anderen, die ich in meinen Abhandlungen über diesen Gegenstand zusammengeschrieben habe, kam mir die unten angeführte Methode in den Sinn als eine klarere und, wie mir scheint, gefälligere.«[104] Cusanus schloß die Schrift am 6. August 1457 ab und widmete sie dem Kaiser Friedrich IV.; daher der Titel *Caesarea quadratura.* Das Ganze ist ein Entwurf, dem die letzte Feile fehlt; nur durch einen Zufall ist der keineswegs ausgereifte Text erhalten. Er ist nur in einer einzigen Handschrift überliefert und wurde auch nicht in die gedruckten Werksausgaben des Cusanus übernommen.

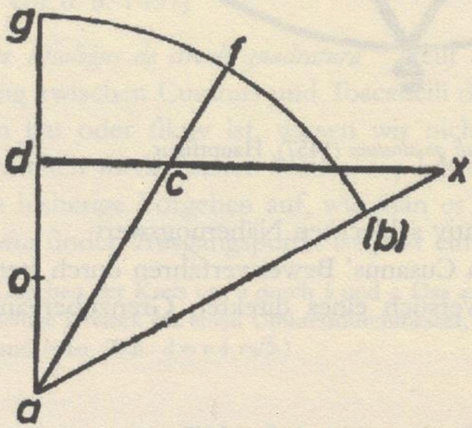

Fig. 3: *De caesarea circuli quadratura* (1457), Hauptfigur.

Anm. 22) XXXVIf.; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 263; Ders., *Nikolaus von Kues und die Mathematik* (wie Anm. 69) 402; Ders., *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 391; J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 24f.; D. Mazzuconi, *Il »De cesarea circuli quadratura«* 63–67.

[104] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 151.

Die von Cusanus genannte Methode besteht darin, eine Konstruktion anzugeben, um den Sechstelkreisbogen (also den Bogen zum Mittelpunktswinkel 60 Grad) in eine Strecke zu verwandeln. Der Hauptsatz besagt sinngemäß (siehe Fig. 3): Wenn *abg* der Sektor ist und *af* die Mittellinie, so ist die Strecke *dx* dem Bogen *bfg* (angenähert) gleich, wenn $ad = 2\,cf$ ist. Diese Konstruktion entspricht dem Näherungswert $\frac{18}{4+\sqrt{3}} = 3,14023\ldots$ für π, der knapp außerhalb der archimedischen Grenzen liegt. – Cusanus' Ansatz in der *Caesarea circuli quadratura* wird etwas später als Sonderfall des Verfahrens in der *Perfectio mathematica* erscheinen.

10. Vorform von *De mathematica perfectione* (vor Oktober 1458)

Im Codex Cusanus 218 befindet sich am Ende (fol. 138^r–141^v) ein ausradierter Text mathematischen Inhalts. J. E. Hofmann konnte aufgrund der Textreste, die mit modernen technischen Methoden sichtbar gemacht wurden, nachweisen, daß es sich hierbei um eine Vorform der Cusanischen Schrift *De mathematica perfectione* handelt.[105] Im Jahre 1983 fand Klaus Reinhardt in einer Handschrift in Toledo eine vollständige Abschrift dieses Textes.[106] Hofmanns Interpretationen konnten durch diesen neuen Fund überprüft werden und stellten sich in allen wesentlichen Punkten als zutreffend heraus.

Höchstwahrscheinlich hängt die Fassung in der Handschrift in Toledo von dem ausradierten Text im Codex Cusanus 218 ab. Vermutlich hat Cusanus selbst die vorläufige Fassung löschen lassen. Dies überrascht, weil aus unserer Sicht die Vorform wohl als die bedeutendere Leistung anzusehen ist. Zwar enthält sie umständliche Formulierungen und ist nicht sehr glücklich gegliedert, aber sie ist durch das Schlußkapitel viel besser abgerundet als die endgültige Fassung. Dieses Schlußkapitel verdient vom mathematischen und vom philosophischen Standpunkt aus große Beachtung. Cusanus geht hier auf die *visio intellectualis* ein und betont die Rolle, die hierbei die Mathematik spielt:

---

[105] J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69); mit Edition und Kommentierung der sichtbar gemachten Teile.

[106] Klaus Reinhardt, *Eine bisher unbekannte Handschrift mit Werken des Nikolaus von Kues in der Kapitelsbibliothek von Toledo*, in: MFCG 17 (1986) 96–141, vor allem 125f., mit Transkription des Textes auf S. 134–141.

> Die *visio intellectualis* wird vom großen Dionysius [Areopagita] als Hinübergehen zu Gott bezeichnet. Ebenso, wie jemand, der das Wort Euklids sieht, daß nämlich ein Punkt das ist, was keinen Teil hat, nach erfolgter *visio intellectualis* die ganze Geometrie, die er geschrieben hat, verbunden sieht und in diese Wissenschaft hinüberschreitet, so schreitet in die Weisheit des Vaters und Schöpfers jener hinüber, der das Wort sieht, durch das er die Jahrhunderte gemacht hat, weil er in jenem Wort alles verbunden sieht, was geschaffen worden ist und geschaffen werden kann, und dieses Sehen ist das Hinübergehen zur Weisheit, die Gott ist.[107]

Euklids *verbum* vom Punkt als Grundlage der Geometrie wird also als Analogon zum schöpferischen *verbum* der göttlichen Weisheit gesehen.[108]

Nicht nur in der Erwähnung des Dionysius Areopagita, sondern auch sonst zeigt die Vorform von *De mathematica perfectione* eine enge Verwandtschaft mit der Schrift *De beryllo*, die Cusanus auf Ersuchen der Mönche aus Tegernsee verfaßte und am 18. August 1458 in Buchenstein beendete.[109] Vermutlich sind beide Schriften etwa gleichzeitig entstanden. Die allgemeinen philosophisch-theologischen Ausführungen, die in der Vorform von *De mathematica perfectione* vorhanden sind, hat Cusanus wohl deshalb nicht in die endgültige Fassung übernommen, weil ähnliche Gedanken auch in *De beryllo* vorkommen. Sie wurden also mehr oder weniger überflüssig, und dies wird der Grund gewesen sein, daß Cusanus den Text der Vorform später ausradieren ließ.[110]

11. *De mathematica perfectione* (Anfang Oktober 1458)

Noch im Herbst des Jahres 1458 schloß Cusanus in Rom die Schrift *De mathematica perfectione* ab.[111] Sie ist dem Kurienkardinal Antonio de la

---

[107] »Visio autem intellectualis nominatur per magnum Dionysium transitio in deum. Sicut, qui videt verbum hoc Euclidis, scilicet, punctus est cuius pars non est, visione intellectuali perfecta, ille videt complicite omnem quam scripsit geometriam et transit in scientiam eius, sic transit in sapientiam patris creatoris ille, qui videt verbum, per quod fecit et secula, quoniam in verbo illo videt et omnia complicite que sunt creata et creari possunt, et hec visio est transitio in sapientiam, que deus est.«

[108] Der Bezug ist *Joh.* 1, 1: »Im Anfang war das Wort.« Siehe auch *De aequalitate*: h X/2c, Nr. 21–23, und Responsio ebd. Nr. 3.

[109] Hierauf hat Böhlandt, *Wege* (wie Anm. 18) 104–109 hingewiesen.

[110] Diese plausible Erklärung gibt Böhlandt, *Wege* (wie Anm. 18) 110.

[111] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 160–177. Zum Inhalt siehe ebd. XXXVIf.; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 264; Ders., *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 392;

Cerda gewidmet. Jetzt wird der Gedanke der *De caesarea circuli quadratura* allgemeiner gewendet und mit früheren Ergebnissen vereinigt. Das Hauptergebnis dieser Schrift ist die Ausstreckung eines *beliebigen* Kreisbogens (siehe Fig. 4):

Ausgangspunkt ist der Kreissektor *acd* mit der Sehne *cd* und der Mittellinie *abe*. Jetzt wird der Sektor so vergrößert, daß die neue Sehne *fg* = *ab* + *ac* + *ad* ist. Dann ist der Bogen *fg* gleich der Sehne *fg* plus dem »Pfeil« *be*.

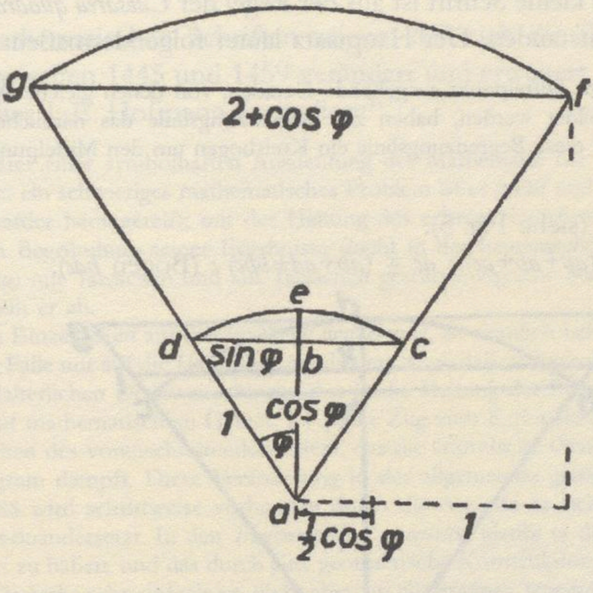

Fig. 4: *De mathamatica perfectione* (1458), Hauptfigur mit Ergänzungen.

Man kann leicht berechnen, daß dies der Näherung

$$\varphi \approx \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$$

entspricht.[112] Für nicht zu große Winkel φ ist dies eine brauchbare Näherung. Als Spezialfall folgt aus dieser Regel die Vorschrift, die in der

J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 26f.

112 Siehe J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 265, und J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 26f.

Caesarea circuli quadratura für den Winkel 60° angegeben war; diese Folgerung vermerkt Cusanus ausdrücklich.[113]

12. *Aurea propositio in mathematicis* (Rom, 8. 8. 1459)

Die *Aurea propositio in mathematicis*[114] ist die letzte uns bekannte mathematische Abhandlung des Cusanus. Sie wurde am 8. August 1459 in Rom beendet. Diese kleine Schrift ist aus der Regel der *Caesarea quadratura* durch Ausweitung entstanden. Der Hauptsatz lautet folgendermaßen:

> Drei von einem Mittelpunkt ausgehende Geraden, von denen gleiche Winkel (nicht über 45°) gebildet werden, haben zur Begrenzungslinie das nämliche Verhältnis, gleichgültig ob diese Begrenzungslinie ein Kreisbogen um den Mittelpunkt oder dessen Sehne ist.

Dies bedeutet (siehe Fig. 5):

$$(ab+ah+ac) : ac = (ab+ad+bhc) : (\text{Bogen } bdc).$$

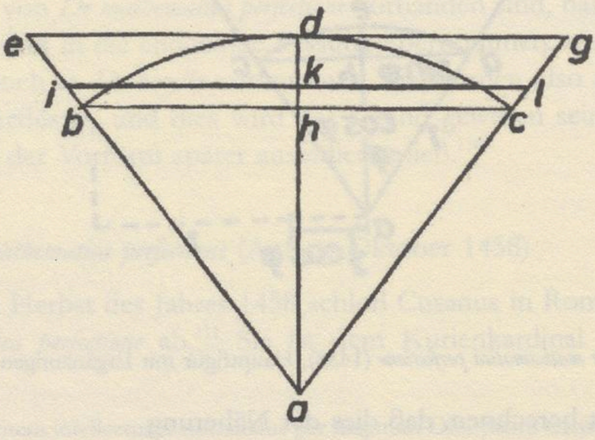

Fig. 5: *Aurea propositio in mathematicis* (1459), Teilfigur.

[113] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 175.

[114] Deutsche Übersetzung: *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) 178–182; Edition: D. Mazzuconi, *Il »De cesarea circuli quadratura«* (wie Anm. 103) 73–75. Zum Inhalt siehe *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXXVII; J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 265f.; Ders., *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 392f.; J. E. Hofmann / R. Haubst, *Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione* (wie Anm. 69) 26; D. Mazzuconi, *Il »De cesarea circuli quadratura«* (wie Anm. 103) 72f.

Cusanus' Beweis dieser Beziehung, die wiederum als Näherung zu betrachten ist, stimmt.[115] Man kann zeigen, daß dieser Ansatz eine Variante zur Bogenausstreckung in der *Perfectio mathematica* ist und gleichzeitig eine Verallgemeinerung des Gedankens aus der *Caesarea quadratura*.[116]

IV. Würdigung und Fortwirken

Die 12 mathematischen Schriften zeigen, daß sich die Denkweise des Cusanus zwischen 1445 und 1459 verändert und erweitert hat. Sehr treffend hat dies J. E. Hofmann formuliert:[117]

> Als Vertreter einer symbolhaften Ausdeutung der Mathematik hat er begonnen: im Ringen um ein schwieriges mathematisches Problem ist er mehr und mehr zum Fachwissenschaftler herangereift; mit der Haltung des echten Naturforschers, der in der sachlichen Begründung seiner Ergebnisse (nicht in der heuristischen Form der Untersuchung) nur Tatsachen und auf Tatsachen gestützte logische Schlüsse verwenden will, schließt er ab.
>
> Was an Einzelheiten auf diesem Wege liegen mag, ist ziemlich belanglos; es kommt in diesem Falle nur auf die Hauptlinie an, die uns zeigt, daß und wie der CUSANER aus der mittelalterlichen Denkweise hineinführt in die Haltung der Renaissancemenschen – auch auf mathematischem Gebiet. [. . .] Der Zug zum Rationalen ist [. . .] auch ein Kennzeichen des voranschreitenden Alters, das die stürmische Phantasie der Jugendjahre langsam dämpft. Diese Veränderung in der allgemeinen geistigen Haltung des CUSANERS wird schrittweise vorbereitet durch die Art, wie er sich mit den Einzelheiten auseinandersetzt. In den *Transmutationes geometricae* glaubt er das große Problem gemeistert zu haben, und das durch eine geometrische Konstruktion, die im speziellen Fall des Dreiecks sehr einfach ist, nicht aber am allgemeinen regelmäßigen Vieleck. In den *Complementa arithmetica* spricht er aus, daß es ihm in erster Linie auf eine möglichst einfache rationale Darstellung von r aus r_n und ρ_n ankommt; aber wie das ihm einzelnen geht, sieht er noch nicht klar, sondern nur wie im Nebel. In der *Quadratura circuli* ist ihm seiner Meinung nach der große Wurf gelungen; aber unter dem Eindruck der Fachkritik muß er nach Abschluß des ersten Buches der *Complementa mathematica* zugeben, daß sich die behauptete Proportionalität zwischen $f - f_n$ und $r_n - \rho_n$ nicht erweisen läßt. Vergeblich häuft er Versuch auf Versuch: er fühlt es selbst, daß mit den gegebenen komplizierten Regeln nichts zu gewinnen ist. Der matte Abschluß des zweiten Buches der *Complementa mathematica* in der ursprünglichen Fassung ist nicht nur das Anzeichen geistiger Erschöpfung, sondern ebensosehr die Folge der ihn quälenden inneren Unsicherheit, und der fehlende Schluß in der letzten Fassung der *Complementa mathematica* drückt wohl das Wissen um die Mängel des Vorgebrachten

[115] Siehe J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 266.

[116] Siehe Ders., *Sinn und Bedeutung* (wie Anm. 69) 392f.

[117] *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXXVIIIf.

noch etwas deutlicher aus. Zufriedenstellen kann einzig und allein eine einfache und umfassende Regel. Sie kristallisiert sich nur ganz langsam heraus: in der *Caesarea quadratura* an einem Spezialfall und erst in der *Perfectio mathematica* in der allgemeinen Fassung.

Wir sehen heute, daß alle systematischen Ansätze des Cusanus auf dieselbe Regel hinauslaufen, nämlich eine Beziehung zwischen dem Radius r eines Kreises und den Radien r_n bzw. ρ_n des umfangsgleichen um- bzw. einbeschriebenen n-Ecks, die man vereinfacht so schreiben könnte:

$$r \approx \tfrac{1}{3}(2r_{\mathrm{n}} + \rho_{\mathrm{n}}) \qquad (2).$$

Diese Regel ist am klarsten in der *Aurea propositio* ausgesprochen. Wir finden sie aber auch in der *Perfectio mathematica*, und man kann auch die Ansätze in der *Quadratura circuli* und in den *Complementa arithmetica* in Verbindung mit dieser Formel bringen.[118] Man muß allerdings sagen, daß Cusanus diesen Zusammenhang zwischen seinen Regeln sicherlich nicht gesehen hat: die Regel in der *Perfectio mathematica* ist für ihn eine andere als die in den *Complementa mathematica.* Ihm ist als Nichtmathematiker dieser Zusammenhang verschlossen geblieben; aber auch Fachmathematiker hätten ihn damals nicht finden können, da er Konvergenzbetrachtungen unendlicher Reihen voraussetzt.

So verwundert es nicht, daß viele von Cusanus' Zeitgenossen in seinen Ansätzen nur die Versuche eines Dilettanten gesehen und festgestellt haben, daß seine Kreisnäherungen im allgemeinen außerhalb der Grenzen lagen, die Archimedes in der *Kreisquadratur* aufgestellt hatte. Die Meinung der Fachwissenschaftler wurde etwa bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts durch die scharfe Kritik beeinflußt, die der wohl bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, Johannes Regiomontanus, bereits wenige Jahre nach der Aufzeichnung der cusanischen Gedanken geäußert hat. Regiomontan kannte allerdings nur einen Teil der mathematischen Schriften des Cusanus; u. a. war ihm die Regel aus den *Transmutationes geometricae* nicht zugänglich, die einen Näherungswert für π liefert, der innerhalb der archimedischen Grenzen liegt. Regiomontan hat die ihm vorliegenden Schriften kritisch untersucht und mathematische Unzulänglichkeiten festgestellt. Seine Stellungnahme ist in Briefen und Abhandlungen aus

[118] Siehe hierzu *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XXXIXf.

dem Jahre 1464 erhalten, die sich an Toscanelli richten.[119] Sehr viel stärker kommt Regiomontans Kritik in einem Brief aus dem Jahre 1471 zum Ausdruck, in dem es heißt:[120]

> Der Kardinal Nikolaus von Kues, ein lächerlicher Geometer und Wetteiferer des Archimedes, wie viele Kleinigkeiten hat er im Bestreben, sich zu brüsten, in unserer Zeit eingeschleppt? Denn er hat zahllose Arten der Kreisquadratur veröffentlicht, die völlig wertlos sind und sich auf nichts anderes stützen als auf einige fadenscheinige Behauptungen von Lull.

Aus der Sicht des Fachmathematikers ist Regiomontans Kritik berechtigt. Sie verkennt aber, daß Cusanus' Bemühungen nicht primär mathematisch gemeint waren, sondern in einem größeren Kontext gesehen werden müssen.

Weil die Werke des Cusanus mehr von Theologen als von Fachmathematikern gelesen wurden, haben sie die Mathematik der Folgezeit nicht besonders stark beeinflußt. Wirkungsgeschichtlich bedeutend war aber die durch die Gleichung (2) charakterisierte Beziehung zwischen dem Radius des Kreises und den Radien des In- und Umkreises eines isoperimetrischen n-Ecks. François Viète hat in seinem *Munimen* (1594) diese Regel genauer untersucht, möglicherweise in Kenntnis von Cusanus' *Perfectio mathematica*; indem er die archimedische Spirale benutzte, konnte Viète zeigen, daß der Radius des isoperimetrischen Kreises immer kleiner als der rechte Term in (2) ist, so daß die Cusanische Näherung immer nur eine obere Schranke für diesen Radius liefert.[121] Willebrord Snell hat in seinem *Cyclometricus* (1621) Viètes Feststellung benutzt, um Archimedes' Methode zur Kreisberechnung zu verkürzen. Er geht von einer Beziehung aus, die wir so schreiben würden:

---

[119] Sie wurden 1533 von Johannes Schöner veröffentlicht. Zum Inhalt siehe J. E. Hofmann, *Über Regiomontans und Buteons Stellungnahme zu Kreisnäherungen des Nikolaus von Kues*, in: MFCG 6 (1967) 124–154 und F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 87–96.

[120] »Nicolaus autem Cusensis cardinalis, geometra ridiculus, Archimedisque emulus, quantas nugas ostentabundus nostra tempestate invexit? Quippe qui plurimos quadrabilis circuli modos edidit frivolos penitus et non nisi Lullianis quibusdam suasiunculis innitentes.« (Schreiben an Christian Roder, ediert in M. Curtze, *Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder*, in: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften 12 [1902] 185–336, hier 329. Curtzes Text wurde nach der Originalhandschrift korrigiert.)

[121] Siehe hierzu *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XLIf.

$$\frac{3}{2+\cos\varphi} < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1+2\cos\varphi}{3\cos\varphi} \qquad (5)$$

Die untere Schranke stimmt mit der Vorschrift der *Perfectio mathematica* überein. Christiaan Huygens hat dann diese Regel umgebildet, um einen Kreisbogen geometrisch in eine Strecke zu verwandeln (siehe Fig. 6): An den Durchmesser BA wird der Kreisradius AC angetragen. Die Verlängerung der Strecke CE schneidet die in B gezeichnete Kreistangente in L. Dann ist $BL = x$ die gesuchte Näherung. Die Rechnung zeigt leicht, daß

$$\frac{x}{3} = \frac{\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$$

ist; dies ist die linke Seite von (5).[122]

Für die Aufnahme der mathematischen Gedanken des Cusanus bis zum 18. Jahrhundert sei auf die ausführliche Darstellung bei Nagel verwiesen.[123] Er hat gezeigt, daß sich – trotz der negativen Äußerungen von Regiomontanus – zahlreiche Mathematiker bis ins 18. Jahrhundert hinein mit seinen mathematischen Schriften beschäftigt haben. Auf seine Werke beziehen sich – neben den schon genannten Personen – auch andere bedeutende Männer wie Stifel, Cardano, Clavius, Descartes, Gassendi, Leibniz und Wallis. Mathematische Ideen, die Nikolaus von Kues aussprach, sind also letztlich doch von Fachmathematikern aufgegriffen und für die Kreisquadratur nutzbar gemacht worden.

122 Zu Snell und Huygens siehe *Nikolaus von Cues. Die mathematischen Schriften* (wie Anm. 22) XLIIf., und J. E. Hofmann, *Nikolaus von Cues – der unwissend-Wissende* (wie Anm. 69) 266f.

123 F. Nagel, *Nicolaus Cusanus* (wie Anm. 2) 86–141.

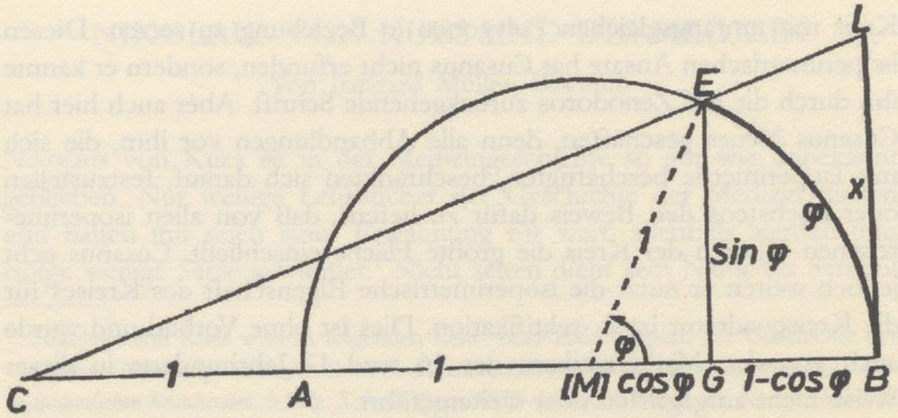

Fig. 6: Chr. Huygens: *De circuli magnitudine inventa*, Leiden 1654 *prop.* 16 mit Ergänzungen.

Um zusammenzufassen: Wenn man als Mathematikhistoriker versucht, die mathematischen Schriften des Cusanus zu würdigen, so muß man festhalten, daß sie in mehrfacher Hinsicht aus dem Rahmen ihrer Zeit fallen: Ungewöhnlich ist schon, daß ein Theologe sich so intensiv mit Mathematik beschäftigt hat. Zwar war es im Mittelalter nicht unüblich, daß man in der Mathematik ein Mittel zur Welterkenntnis sah – schließlich stand ja in der Bibel, daß Gott alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet habe –, aber daß ein Theologe gleich zwölf, teilweise recht umfangreiche, mathematische Schriften verfaßt hat, ist ohne Vorbild; nicht einmal Ramon Lull ist in dieser Hinsicht mit Cusanus zu vergleichen. Auch Cusanus betrieb Mathematik nicht um ihrer selbst willen: vielmehr eröffnete sie ihm eine Möglichkeit, sich der Unendlichkeit Gottes zu nähern. Somit war die Mathematik integraler Teil seiner Theologie und seiner Philosophie. Seine Beschäftigung mit dem Kreis war philosophisch begründet: der Kreis als Symbol des Gekrümmten, verglichen mit der Strecke als Symbol des Geraden, und das Zusammenfallen dieser beiden gegensätzlichen Prinzipien im Unendlichen. Auch dieser Ansatz ist genuin cusanisch. Cusanus war nicht der einzige Denker des Mittelalters, der sich mit Kreisquadratur und -rektifikation beschäftigte: diesem Thema sind im westlichen Mittelalter viele Schriften gewidmet. Sie alle stehen aber in der Tradition des Archimedes und benutzen seinen Ansatz der Exhaustion durch ein- bzw. umbeschriebene Polygone. Nicht so Cusanus: er ging nicht von Archimedes aus, sondern von der Idee, den

Kreis mit umfangsgleichen Polygonen in Beziehung zu setzen. Diesen isoperimetrischen Ansatz hat Cusanus nicht erfunden, sondern er kannte ihn durch die auf Zenodoros zurückgehende Schrift. Aber auch hier hat Cusanus Neues geschaffen, denn alle Abhandlungen vor ihm, die sich mit Isoperimetrie beschäftigten, beschränkten sich darauf, festzustellen oder höchstens den Beweis dafür zu liefern, daß von allen isoperimetrischen Figuren der Kreis die größte Fläche einschließt. Cusanus geht jedoch weiter: er nutzt die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises für die Kreisquadratur bzw. -rektifikation. Dies ist ohne Vorbild und wurde auch von den Mathematikern des 16. und 17. Jahrhunderts in dieser Weise nicht aufgegriffen oder weitergeführt.

Unter diesen Umständen spielt es keine große Rolle, daß Cusanus als Nichtfachmann seine Ideen oft nicht sehr klar darstellt. Allerdings hat die unzureichende mathematische Form dazu geführt, daß der wertvolle Gehalt seiner mathematischen Schriften in Vergessenheit geriet. Erst im 20. Jahrhundert haben sich die Mathematikhistoriker, vor allem J. E. Hofmann, ernsthaft mit den Schriften des Cusanus beschäftigt und festgestellt, daß sich hinter seinen Formulierungen zukunftsweisende Ideen verbergen, u. a. infinitesimale Ansätze und Vorstellungen über funktionale Abhängigkeiten. Daher kann man Cusanus als einen Wegbereiter der neuzeitliche Mathematik sehen.