ÜBER EINE BISHER UNBEKANNTE VORFORM DER SCHRIFT DE MATHEMATICA PERFECTIONE DES NIKOLAUS VON KUES

Von Joseph Ehrenfried Hofmann, Tübingen
unter Mitwirkung von Rudolf Haubst, Mainz

Oportet autem attingere sensum volentem potius supra verborum vim intellectum efferre quam proprietatibus vocabulorum insistere, quae tantis intellectualibus mysteriis proprie adaptari non possunt.
De docta ignorantia, Buch I, Kap. II

Vorwort

1. In dem von J. Marx herausgegebenen Verzeichnis der Handschriften-Sammlung des Hospitals von Kues[1] wird am Ende der Aufzählung der in Cod. Cus. 218 enthaltenen Schriften des Nikolaus von Kues ein ausradierter Text mutmaßlich mathematischen Inhaltes erwähnt[2]. Herr Haubst brachte den Kodex im Einvernehmen mit Herrn Joh. Hommer, dem damaligen Rektor des Sankt Nikolaus-Hospitals, und dem Vorstand der Cusanus-Gesellschaft am 9. März 1968 in das Bundeskriminalamt Wiesbaden, das sich erboten hatte, den Text wieder lesbar zu machen. Mit Hilfe von verdampfender Rhodan-Wasserstoffsäure, welche die restlichen Tintenspuren zu hellrotem Aufleuchten brachte, konnte Herr Dipl.-Ing. Fr. Windhaber die fraglichen Blätter reproduzieren. Diese Photographien, für deren Übermittlung wir den Herren des Bundeskriminalamtes zu außerordentlichem Dank verpflichtet sind, waren die Unterlage für unsere nachfolgenden Entzifferungsversuche. Die Pergament-Handschrift wurde vermutlich mit Bimsstein abradiert, jedoch zum Glück nicht überall mit der nämlichen Gründlichkeit, und außerdem nicht neu beschrieben. Deshalb ließen sich einige Textstellen im Zusammenhang lesen oder wenigstens inhaltlich verstehen; bei anderen waren freilich nur mehr einzelne Buchstaben oder Wortfetzen erkennbar.
Der Aufforderung von Herrn Haubst nachkommend haben wir uns um die Entzifferung des sehr schön und gleichmäßig geschriebenen Textes bemüht, sind jedoch erst nach mehreren mißlungenen Versuchen einigermaßen zu Erfolg gekommen. Unserer Bitte nachkommend hat alsdann Herr Haubst den Text nochmals revidiert und aufgrund seiner außerordentlichen Kenntnis des Wortbestandes bei Nikolaus wesentliche Ergänzungen zu unserer Entzifferung beige-

[1] Trier 1905.
[2] Fol. 138^r–141^v.

fügt. Leider trägt die vermutlich aus dem Jahr 1462 stammende Kopie keine eigentliche Überschrift; wahrscheinlich trifft die Vermutung von Herrn Haubst das Richtige, daß es sich um einen Brief handelt. Empfänger war vielleicht einer der Tegernseer Mönche, die sich so stark für alles interessierten, was Nikolaus schrieb, – auch für das Mathematische.

Das Schreiben dürfte noch in Südtirol entstanden sein, wo sich Nikolaus in die Veste Buchenstein zurückgezogen hatte, und zwar vor Abschluß der Schrift *De beryllo*, wo in Kapitel 25 auf die *De mathematica perfectione* hingewiesen wird. Dies kann sich nur auf das vorliegende Schreiben beziehen; denn die endgültige Fassung[3] ist nach dem, was in der Widmung an den Kardinal-Presbyter A. della Cerda von S. Chrysogonus steht, erst in Rom und in zwei Tagen niedergeschrieben worden, also wohl im Spätherbst 1458, das heißt einige Zeit nach der Ankunft in der Ewigen Stadt, wo Nikolaus nach der Vertreibung aus seiner Brixener Diözese am 30. September 1458 eingetroffen war. Daß es sich wirklich um einen Brief handelt, geht wohl auch aus der Wendung *publice movisti* hervor, die Herr Haubst am Ende des ersten (leider nur lückenhaft lesbaren) Textabschnittes hat entziffern können. Aus dieser Bemerkung ist zu entnehmen, daß Nikolaus von seinem Korrespondenten in einem vorhergehenden Schreiben zur Veröffentlichung seiner Gedanken über die *perfectio mathematica* aufgefordert worden war.

Im nachfolgenden geben wir die einigermaßen lesbaren Abschnitte des Brieftextes im Wortlaut wieder, ergänzt durch beigefügte Erläuterungen und durch Überblicke über den mutmaßlichen Inhalt der für eine wörtliche Wiedergabe nicht geeigneten Abschnitte. Um des besseren Verständnisses willen soll jedoch in der nachfolgenden Einführung vorausgeschickt werden, wie die mathema-

---

[3] Wir beziehen uns hier und im nachfolgenden stets auf die Texte der von uns aufgrund der Handschriften vorbereiteten lateinischen Ausgabe, die wir noch nicht in Druck gegeben haben. Wir fügen jedoch grundsätzlich Hinweise auf die beiden für das Mathematische maßgeblichen besten Renaissance-Drucke bei, nämlich a) auf die von J. Lefèbre d'Étaples besorgten *Nicolai Cusani cardinalis opera* II, Paris 1514=Frankfurt/M.1968, wo sich das Mathematische im 2. neu foliierten Teil vorfindet [in Zukunft zitiert als CP II mit nachfolgender Foliierung], b) auf die Wiedergabe einiger in CP II fehlenden Stücke in dem von Joh. Regiomontan 1464 verfaßten *De quadratura circuli dialogus et rationes diversae separatim aliquot libellis exquisitae*. Sie sind von Joh. Schöner 1533 zu Nürnberg als selbständig paginierter Anhang zu Regiomontans *De triangulis omnimodis libri quinque* (1462/64) herausgegeben worden [in Zukunft zitiert als CN mit nachfolgenden Seitenzahlen]. Weiterhin verweisen wir stets auch auf die Wiedergabe in den *Mathematischen Schriften*, übersetzt von Josepha Hofmann; mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von J. E. Hofmann, Hamburg 1952= *Schriften des Nikolaus von Cues*, Heft 11 [in Zukunft zitiert als CMH mit nachfolgenden Seitenzahlen]. Diese Übersetzung bezieht sich auch auf jene mathematischen Schriften, die bisher noch nicht im lateinischen Text im Druck zugänglich sind.

tischen Hauptmethoden aussehen, die sich in den anderen mathematischen Schriften des Nikolaus vorfinden[4].

Zur Einführung

2. *Von der frühesten isoperimetrischen Annäherung des Kreises*

Schon in der ältesten mathematischen Abhandlung des Nikolaus, den am 25. November 1445 abgeschlossenen und dem ausgezeichneten Gelehrten P. Toscanelli gewidmeten *De geometricis transmutationibus*[5], ist von umfangsgleichen regelmäßigen Vielecken die Rede[6]. Die Art der Erwähnung läßt erkennen, daß sich Nikolaus hier auf eine Schrift des von ihm nicht genannten Th. Bradwardine[7] bezieht, mit deren Inhalt er vermutlich in der philosophischen Einführungsvorlesung an der Universität Köln (1425) bekannt geworden war. Interessant ist ferner ein stiller Hinweis auf die Archimedische *Kreisquadratur*[8], der

---

[4] Für Einzelheiten sei auf die Anmerkungen zu CMH verwiesen.

[5] CMH 3–28 u. 189/98. Die Fassung in CP II, fol. 33^r–53^v ist von dem Augustiner-Domherrn OMNISANCTUS VASARIUS im Kloster Livry aufgrund einer verderbten Handschrift herausgegeben und mit Erläuterungen versehen worden. Die dort versuchte Wiederherstellung der zweiten Praemisse (fol. $38^r/42^v$) ist mißlungen; die in CMH, 14/15 deutsch wiedergegebenen Handschriften enthalten einen anderen Text. Später hat sich Nikolaus von *De geometricis transmutationibus* etwas distanziert, wie Bemerkungen in der *Quadratura circuli* (CN, 9 = CMH, 67 u. 213, Anm. 18) und in den *De mathematicis complementis* (CP, 68^r = CMH, 90/91) zeigen, und diese Jugendschrift nicht mit in die von ihm selbst veranlaßte und durchgesehene Sammlung seiner Schriften aufnehmen lassen.

[6] CP II, 33^v = CMH, 5–6 und 36^r–36^v = CMH, 6–11.

[7] *Geometria speculativa* (wohl um 1325), ed. P. S. CIRUELO, Paris 1495 u. ö. Es handelt sich um eine stark philosophisch orientierte und sehr geschickt aufgebaute Geometrie, die schon zu Beginn Hinweise auf Ps.-BOETHIUS und J. CAMPANUS enthält. Gemeint ist hier mit BOETHIUS eine lateinische Bearbeitung des 11. Jhdts. von Teilen der EUKLIDischen Elemente aus dem Griechischen mit Zusätzen aus Schriften lateinischer Feldmesser, mit CAMPANUS die um 1260 verfertigte Revision der um 1150 von ADELHARD VON BATH besorgten lateinischen Übersetzung einer arabischen EUKLID-Ausgabe mit zusätzlichen Ergänzungen, erstmals gedruckt von ERHARD RATDOLT, Venedig 1482 u. ö. – Die von BRADWARDINE im 5. Kap. des 2. Traktats ohne Nennung der Vorlage wiedergegebene Behandlung isoperimetrischer Figuren geht auf ZENODOROS zurück; auf weitere Exzerpte aus arabischen Euklid-Bearbeitungen und Kommentaren sei hier nur nebenher verwiesen.

[8] Gemeint ist die Beziehung $f = ru/_2$ zur Kennzeichnung der Kreisfläche aus Halbmesser und Umfang: CMH, 21 = CP II, 45^r: *Ostensum enim est a subtilioribus, per multiplicationem semidiametri in medietatem peripheriae aream quadrangulam exurgere, quae nec maior nec minor erit area circuli.* Weitere Bezugnahmen auf diese Beziehung finden sich in CN, 5, 10 = CMH, 29, 143 und CP II, 60^r = CMH, 72.

ebenfalls aus Bradwardine[9] stammen dürfte. Nikolaus weiß[10], daß das gleichseitige Dreieck unter allen umfangsgleichen regelmäßigen Figuren die kleinstmögliche Fläche umspannt; ferner, daß die umspannte Fläche mit zunehmender Winkelzahl zunimmt, und daß der umfangsgleiche Kreis die größtmögliche Fläche umspannt. Er bemerkt jedoch ganz richtig, daß man den Kreis auch durch fortgesetztes „Winkelverdoppeln" nicht genau zu „erreichen" vermag; man komme ja auch bei den Zahlen durch fortgesetztes Vervielfachen nicht zu einem Maximum.

Da Nikolaus von der gedanklichen Übereinstimmung entscheidender Beziehungen im Maximum und Minimum (einer veränderlichen Größe) überzeugt ist (*coincidentia oppositorum*) und im vorliegenden Fall im Maximum eine Unbestimmtheit vorfindet, bezieht er sich in der ersten Prämisse auf eine (freilich auch in seinem eigenen Sinne nur näherungsweise richtige) geometrische Konstruktion für den Halbmesser des Kreises, der mit dem gleichseitigen Ausgangsdreieck umfangsgleich ist[11]. Damit ist er zum Kernproblem von *De geometricis transmutationibus* vorgedrungen:

Das gleichseitige Dreieck (Fig. 1) sei *bcd*, sein Mittelpunkt *a*. Die Seite *bc* werde durch die Punkte *e, f, g* in vier gleiche Stücke geteilt. Wird *ae* um 1/4 seiner

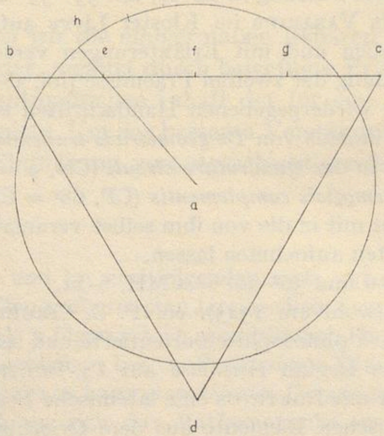


Fig. 1: Ausrundung eines gleichseitigen Dreiecks in den umfangsgleichen Kreis

Länge bis zu *h* verlängert, dann ist *ah* der Halbmesser des zum Dreiecksumfang isoperimetrischen Kreises[12].

---

[9] *Geometria speculativa*[7], 6. Kap. des 3. Traktats, *conclusio* 5.

[10] CP II, fol. 33^r = CMH, 5.

[11] CP II, fol. 36^r–36^v = CMH, 6–8.

[12] In der nur handschriftlich erhaltenen Abhandlung *De circuli quadratura* vom 12. VII. 1450 (CMH, 36–57) steht vor allem die Frage nach der Existenz und genauen Bestimmbarkeit des zum umfangsgleichen gleichseitigen Dreieck isoperimetrischen

Nun ersetzt Nikolaus das gleichseitige Dreieck durch ein umfangsgleiches regelmäßiges Vieleck und behauptet (zu Recht), daß $\frac{ah}{ae}$ mit zunehmender Eckenzahl abnimmt[13], hat also gefühlsmäßig durchaus zutreffende Vorstellungen von den hier auftretenden Näherungsbeziehungen[14].

3. *Von der tastenden Verallgemeinerung des eingeschlagenen Verfahrens*

In den *De arithmeticis complementis*[15], die mutmaßlich im Herbst 1445 entstanden sind, nimmt Nikolaus zusätzlich an, der Halbmesser r des isoperimetrischen

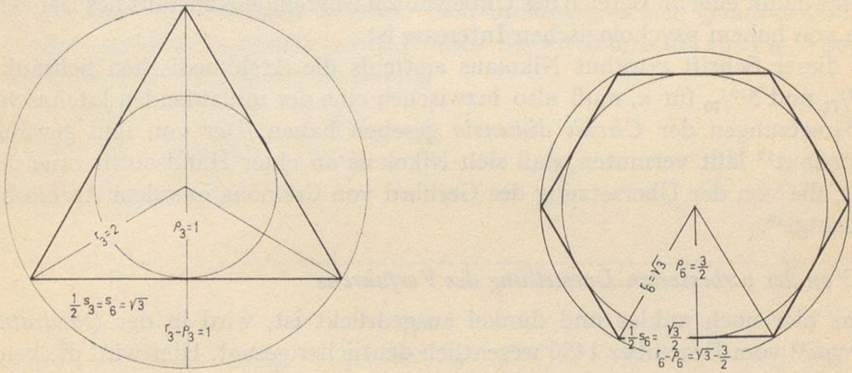


Fig. 2: Zur Bestimmung des isoperimetrischen Halbmessers aus einem gleichseitigen Dreieck und dem umfangsgleichen regelmäßigen Sechseck

Kreises lasse sich aus dem Umkreishalbmesser r_n des umfangsgleichen regelmäßigen n-Ecks und dem zugehörigen Inkreishalbmesser ρ_n wie folgt zusammensetzen (wir haben nur den zugrundeliegenden Gedanken fixiert):

(3,1) $r = r_n - \mu(r_n - \rho_n)$,

unter μ eine feste Zahl verstanden, die unabhängig von n ist. Um μ zu bestimmen, beginnt er mit dem gleichseitigen Dreieck, dessen Inkreishalbmesser $\rho_3 = 1$ gesetzt wird: Dann ist $r_3 = 2$, $s_3 = 2\sqrt{3}$. Hieraus folgt die Seite $s_6 = \sqrt{3}$

Kreises im Vordergrund. Hier erscheint zwar auf S. 49 der aus der gegebenen Konstruktion folgende Wert 3,1423 (statt 3,1416) für π in der Form $6\sqrt{2700} : 2^1/_2\sqrt{1575} = 72 : 5\sqrt{21}$, wird jedoch aus philosophischen Gründen als eine Näherung bezeichnet, „die jedoch weder um eine Minute noch um einen angebbaren Teil einer Minute größer oder kleiner sei als der richtige Wert". Übrigens liegt der so gekennzeichnete Wert für π zwischen den von ARCHIMEDES in der *Circuli dimensio* angegebenen Schranken $3^{10}/_{71} = 3{,}1408$ und $3^{10}/_{70} = 3{,}1429$, ist also erstaunlich gut und besser als alle seine anderen numerischen Näherungen.

[13] CP II, fol. 36v = CMH, 10–11.

[14] Man vergleiche CMH, 202–204 und 205, Anmerkung 19.

[15] CP II, fol. 54r–58v = CMH, 29–35. Der wiedergegebene Text, für den keine Handschrift zur Verfügung steht, enthält große Unklarheiten.

des umfangsgleichen regelmäßigen Sechsecks. An diesem wird $r_6 = \sqrt{3}$, und $\rho_6 = 3/2$, also gemäß der geäußerten Ansicht $r = 2 - \mu = \sqrt{3} - \mu(\sqrt{3} - 3/2)$ und $\mu = \frac{2-\sqrt{3}}{5/2-\sqrt{3}}$. Vermittels des damals häufig verwendeten Näherungswertes 7/4 für $\sqrt{3}$ entsteht $\mu = 1/3$, also $r = 5/3$ und allgemein[16]

$$(3{,}2)\quad r \approx 1/3(2r_n + \rho_n)$$

Dies wollen wir die *kennzeichnende Näherung* nennen. Sie beherrscht in erstaunlichem Maße das ganze weitere mathematische Schaffen des Cusanus und bezeugt damit eine im Bereich des Unbewußten wurzelnde Konstanz des Denkens, die von hohem psychologischen Interesse ist.
In dieser Schrift erwähnt Nikolaus erstmals die Archimedischen Schranken $3^{10}/_{71}$ und $3^{10}/_{70}$ für π, muß also inzwischen eine der umlaufenden lateinischen Übersetzungen der *Circuli dimensio* gesehen haben. Der von ihm gewählte Wortlaut[17] läßt vermuten, daß sich Nikolaus an einer Handschrift orientiert hat, die von der Übersetzung des Gerhard von Cremona aus dem Arabischen abhängt[18].

4. *Von der verbesserten Darstellung des Verfahrens*

Was hier noch unklar und dunkel ausgedrückt ist, wird in der *Quadratura circuli*[19] vom Dezember 1450 wesentlich deutlicher gesagt. Hier wird die kenn-

---

[16] NIKOLAUS zieht diese Schlußfolgerung in der vorliegenden Schrift noch nicht; er spricht vielmehr in CP II, $54^v/55^r$ = CMH, 31/34 nur von der Möglichkeit, mittels seines Vorgehens die trigonometrischen Funktionen ,,aller" Winkel zu bestimmen, und verweist als Beispiel auf die Behandlung des Winkels von $45^0 = 360^0{:}8$, der als Mittelpunktwinkel zum charakteristischen Dreieck des regelmäßigen Achtecks gehört.

[17] Die Stelle in P II, fol. 54^r = CMH, 29 lautet so: *Fuerunt viri diligentissimi, quorum princeps videtur Archimedes, qui ostenderunt circumferentiam circuli triplam in habitudine ad diametrum, additis plus decem septuagesimis primis ipsius diametri et minus decem septuagesimis, et hanc propinquitatem praecisiorem continue fieri posse ostenderunt.*

[18] Hierzu vergleiche man M. CLAGETT: *Archimedes in the Middle Ages* I, Madison 1964, 40–58 nebst einer Variante, 100–135. Die Beziehung zum Wortlaut der in Frage stehenden prop. 3 (S. 48=112) ist ziemlich deutlich erkennbar: *Omnis linea continens circulum addit super triplum diametri ipsius minus septima et plus 10 partibus 71 partium diametri.* Für das Folgende ist wichtig, daß in diesem Augenblick die Übersetzung ARCHIMEDischer Schriften aus dem Griechischen, die 1450 von JAKOB VON CREMONA abgeschlossen und unter Mitverwendung der 1462 von JOH. REGIOMONTAN durchgeführten Textverbesserung zusammen mit dem griechischen Text von TH. GECHAUFF zu Basel 1544 ediert wurde, NIKOLAUS noch nicht zur Verfügung stand. Der dortige Text (S. 55–58, insbes. 56) lautet so: *Cuiuslibet circuli circumferentia suie diametri est tripla et plus parte, quae minor est septima, et maior decem septuagenis primis.* Er dürfte die Vorlage für die entsprechende Stelle in der *De caesarea circuli quadratura* vom 6. VIII. 1457 (CMH, 151–159, insbes. 158–59) gewesen sein: . . . *quia linea aequalis diametro triplicatae et eius septimae parti est maior quam circumferentia. . . . quia diameter triplicata cum* $^{10}/_{71}$ *eius est minus quam circumferentia, uti haec Archimedes et alii ostenderunt.*

zeichnende Näherung nicht mehr auf (3,1) gestützt, vielmehr auf den gleichwertigen, jedoch geometrisch weit durchsichtigeren Ansatz

(4,1) $r = \rho_n + \lambda(r_n - \rho_n)$.

Ist nun *u* der feste Umfang der verwendeten isoperimetrischen regelmäßigen Vielecke, dann ist $f = {}^1/_2 ru$ die Fläche des isoperimetrischen Kreises und $f_n = {}^1/_2 \rho_n u$ die Fläche des umfangsgleichen regelmäßigen n-Ecks. Also ist $f - f_n$ proportional zum „Pfeil" (*sagitta*) $r_n - \rho_n$. Dies wird freilich zu Beginn der Abhandlung nur kurz angedeutet; im Vordergrund steht die Beziehung zwischen dem gleichseitigen Dreieck, dem umfangsgleichen Quadrat und dem Halbmesser des isoperimetrischen Kreises. Sie wird zunächst aus Fig. 3 deutlich gemacht. Bei ihr wird die Beziehung

(4,2) $\dfrac{r - \rho_3}{r_3 - \rho_3} = \dfrac{r - \rho_4}{r_4 - \rho_4} \left[= \dfrac{r - \rho_n}{r_n - \rho_n} = \lambda \right]$

interpretiert wie folgt[20]:

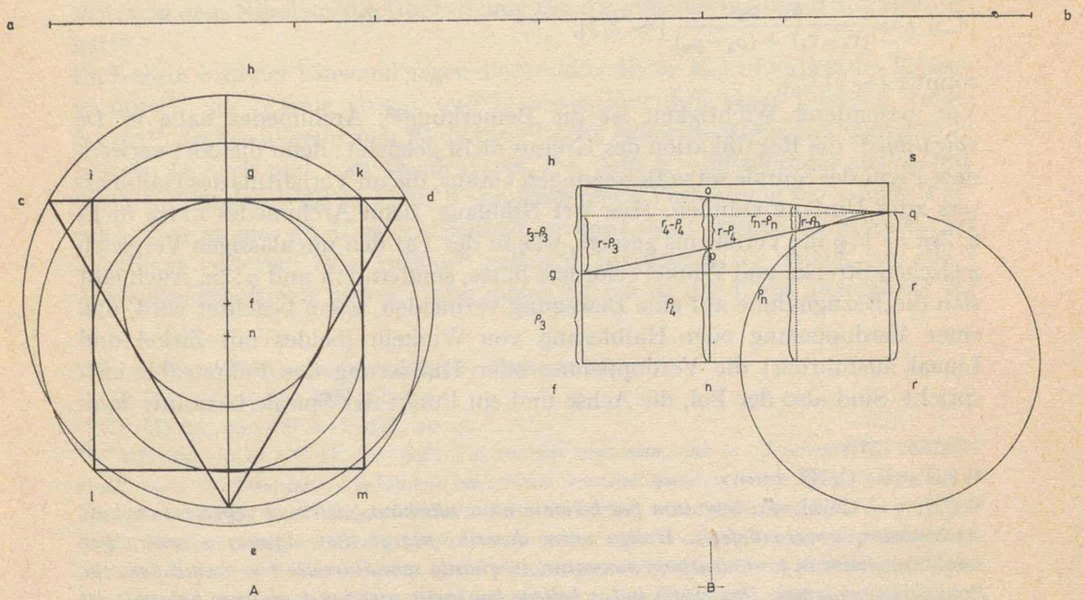


Fig. 3: Anschauliche Erklärung der kennzeichnenden Näherung aus der Quadratura circuli

---

[19] Offenkundig hat NIKOLAUS diese Abhandlung als Vorform von *De mathematicis complementis* angesehen und daher nicht in die von ihm selbst veranlaßte Sammlung seiner Schriften in Cod. Cus. 217–219 aufnehmen lassen. Deshalb fehlt sie in CP; wir kennen auch keine Handschrift, vielmehr nur die Wiedergabe in CN, 5–9 = CMH, 58–67.

[20] CN, 5–6 = CMH, 59–61.

Gemeinsamer Umfang der isoperimetrischen Vielecke ist *u*. Das gleichseitige Dreieck und das umfangsgleiche Quadrat sind in der Teilfigur A in kunstvoller Form ineinanderkomponiert. In der Teilfigur B ist von der waagrechten Grundlinie aus von Punkt *f* ab auf der Senkrechten nach oben einerseits ρ_3 (Endpunkt: *g*), andererseits r_3 (Endpunkt: *h*) abgetragen, ferner von dem beliebigen Punkt *n* der Grundlinie ab auf der Senkrechten nach oben einerseits ρ_4, (Endpunkt: *p*), andererseits r_4 (Endpunkt: *o*). Nun werden *gp* und *ho* in *q* geschnitten; schließlich wird zum Rechteck *fhsr* ergänzt, dessen Seite *rs* durch *q* gehe. Dann, so behauptet Nikolaus, ist *rq* der Halbmesser [r] des isoperimetrischen Kreises.

Um dies rasch einzusehen, fügen wir die Waagrechte durch *q* hinzu (punktiert) und entnehmen (4,2) aus der Gleichheit der Verhältnisse auf den Abschnitten, die auf den Parallelen *gh* und *po* zwischen *gq* und *hq* liegen. Wir finden auch eine summarische Rechnung vor[21], aus der sich $\lambda \sim 2/3$ ergibt: Nikolaus setzt $r_3 = 14$, hat also $\rho_3 = 7$, $^1/_2 s_3 = \sqrt{147}$, $^1/_2 s_4 = \rho_4 = \sqrt{^9/_{16} \cdot 147} = \sqrt{82\,^{11}/_{16}} \sim 9$, $r_4 = \sqrt{2 \cdot 82\,^{11}/_{16}} = \sqrt{165\,^6/_{16}} \sim 13$ und erhält wegen (4,1)

$$(4,3)\quad \lambda = \frac{\rho_4 - \rho_3}{(r_3 - r_4) + (\rho_4 - \rho_3)}\ [\sim 2/3],$$

somit r $[\sim 11\,^2/_3]$.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Bemerkung[22], Archimedes habe in *De spiralibus*[23] die Rektifikation des Kreises nicht geleistet; denn die dort verwendete Figur der Spirale setze Bewegungen voraus, die im Verhältnis des Halbmessers zum Umfang ständen. Hier irrt Nikolaus; denn Archimedes hatte nicht $a : 2r\pi = 1 : \varphi$ ins Verhältnis gesetzt, was in der Tat den unzulässigen Vergleich zwischen Strecke und Winkel erfordert hätte, sondern $r : a$ und $\varphi : 2\pi$. Auch läßt sich die Bezugnahme auf eine Bewegung vermeiden, wenn beachtet wird, daß einer Verdoppelung oder Halbierung von Winkeln (beides mit Zirkel und Lineal ausführbar) die Verdoppelung oder Halbierung des Fahrstrahls entspricht. Sind also der Pol, die Achse und ein Punkt der Spirale bekannt, dann

---

[21] CN, 9 = CMH, 66–67.

[22] CN, 5 = CMH, 59: *Sed dum per helicam hanc ultimam partem se reperisse crederet Archimedes, a vero defecit. Helica enim describi nequit nisi signum a centro per semidiametrum in tanto tempore moveatur, in quanto semidiameter pro circuli descriptione circumvolvitur. Descriptio igitur helicae hos motus supponit, quorum habitudo est ut semidiametri ad circumferentiam. Praesupponit igitur id, quod quaerit. Citius enim recta dari potest circulari lineae aequalis quam helica vera figurari.*

[23] In Definition I hatte ARCHIMEDES die Spirale erklärt als den geometrischen Ort eines Punktes, der den Fahrstrahl mit fester Geschwindigkeit durchläuft, während sich dieser mit fester Geschwindigkeit um den Pol dreht. Wird dieser als Ursprung und die X-Achse als Ausgangslage der Bewegung angesehen, dann ist der laufende Punkt $(r;\ \varphi)$ in Polarkoordinaten gekennzeichnet durch die Laufzeit *t*; nach einer vollen Umdrehung (Laufzeit T) möge er sich in $(a;\ 2\pi)$ befinden. Wir haben also $r/a = \varphi/2\pi = t/T$.

können nur durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal beliebig viele weitere Punkte der Spirale gefunden werden, die eine in sich dichte Menge bilden und den Spiralbogen völlig erfüllen.
Der Hinweis ist historisch deshalb von Bedeutung, weil er zeigt, daß Nikolaus nunmehr die auf Veranlassung des Papstes Nicolaus V. zustandegekommene Übersetzung griechisch geschriebener Abhandlungen des Archimedes gesehen hat[24]. Das wird ausdrücklich zu Beginn von *De mathematicis complementis*[25] gesagt. Aus der eben erwähnten Stelle geht hervor, daß Nikolaus in diese Übersetzung schon im Spätherbst 1450 Einblick erhalten hat.

5. *Versuch einer endgültigen Formulierung*

Was Nikolaus in Eile vor dem Aufbruch zur großen Delegation niedergeschrieben hatte, wurde nach der Rückkehr bei Vorbereitung von *De mathematicis complementis* im Sommer 1453 methodisch sorgfältig entwickelt. Das erste Buch[26] wurde zu Branzoll in den ersten Septembertagen abgeschlossen. Es ist dem großen Gönner, dem wissenschaftsfreundlichen Papst Nikolaus V. gewidmet, von dem Nikolaus die Übersetzung der Archimedischen Schriften erhalten hatte.
Zu Beginn wird der Einwand gegen die Archimedische Rektifikation des Kreises vermittels der Spirale erneut und in etwas ausführlicherer Fassung vorgebracht[27]. In der allgemeinen Einleitung[28] geht Nikolaus wiederum vom gleichseitigen Dreieck und vom Quadrat aus, löst jedoch – offenkundig aus methodischen Gründen – die in Figur 3 vorgenommene Verbindung der beiden Vielecke. Was er hier an Übersichtlichkeit gewinnt, geht freilich an gestaltlicher Schönheit verloren. Den Aufbau[29] vollzieht Nikolaus in 13 Sätzen, auf die 4 Anwendungsbeispiele folgen. Unter diesen Sätzen ist der 5. von Bedeutung. Er

---

[24] Über diese Übersetzung vergleiche Fußnote 18.
[25] CP II, fol. 59^r = CMH, 68–69.
[26] CP II, fol. 59^r–68^r = CMH, 70–92.
[27] CMH, 69–70 = CP II, fol. 59^r: *Testimonio omnium, qui se ad geometrica contulerunt, nemo propinquius Archimede ad circuli pervenit quadraturam. Qui videns illam attingi non posse, nisi curva circularis linea in rectam resolvatur, nisus est hanc artem mediante elica ostendere. Sed quia proportio motus signi a centro per semidiametrum ad motum, in quo in eodem tempore aliud signum per circumferentiam movetur, sine qua elica describi nequit, se habet ut semidiameter ad circumferentiam, quae non est scita, sed quaeritur, hinc videtur ipsum defecisse. Facilius enim erit circulum quadrare quam elicam describere et contingentem eidem in fine circulationis applicare.* – Hier bezieht sich NIKOLAUS auf Satz 18 der Spiralenabhandlung: Die Tangente in $(a; 2\pi) = (a; O)$ schneidet das Lot aus dem Pol auf den Fahrstrahl (d. h. die negative X-Achse) im Abstand $2a\pi$ (das ist der Umfang des Kreises vom Halbmesser a) vom Pol.
[28] CP II, fol. 59^v–60^r = CMH, 70–72.
[29] CP II, fol. 61^r–63^v = CMH, 73–89 mit nachfolgenden Erläuterungen des O. VASARIUS: fol. 63^v–66^v. In den Handschriften gehört der erste Satz des Druckes noch zur Vorbereitung, so daß der Druck 14 Sätze statt 13 zählt.

besagt in moderner Ausdrucksweise, daß $\sin\varphi/\varphi$ mit $\pi/2 > \varphi > 0$ monoton zunimmt, oder anders formuliert, daß mit $0 < \alpha < \beta < \pi/2$ gilt[30]:

(5,1) $\alpha/\beta < \sin\alpha/\sin\beta$.

Bei Behandlung der Anwendungsbeispiele wird die oben vorgeführte Näherungsrechnung zur Bestimmung von λ unverändert übernommen[31].

6. *Toscanellis Kritik*

Nikolaus hatte die beiden frühesten mathematischen Schriften, nämlich *De geometricis transmutationibus* und *De arithmeticis complementis*, seinem Studienfreund Toscanelli gewidmet. Dieser scheint in höflicher, jedoch unmißverständlicher Form Einwände gegen die dort entwickelten Methoden vorgebracht zu haben, die wir jedoch nicht kennen. Sie haben wohl veranlaßt, daß Nikolaus diese beiden mathematischen Abhandlungen nicht in die von ihm selbst vorbereitete Ausgabe seiner Schriften aufnehmen ließ.

Auch Buch I von *De mathematicis complementis* ging zur Beurteilung an Toscanelli. Was dieser zu der neuen Methode in Form eines Briefes an Nikolaus zu sagen wußte, ist glücklicherweise erhalten[32]. Hier wird unter Bezugnahme auf Figur 3 B ausdrücklich betont, es sei wohl möglich, daß die Linien *gq* und *hq* gekrümmt seien; in diesem Fall träfe die von Nikolaus angegebene Beziehung (3,2) (als Gleichung, nicht als Näherung) nicht zu[33].

Die hier von Toscanelli berührte Frage ist entscheidbar, und zwar aufgrund einer Überlegung, die wir Fr. Viète verdanken[34]. Wir gehen (Fig. 4) aus vom Halbkreis OAC des Durchmessers $\frac{a}{\sin\alpha/2}$, der die X-Achse im Ursprung berührt. Sein laufender Punkt $P(r;\varphi)$ ist also in Polarkoordinaten gekennzeichnet durch

(6,1) $r = a\,\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha/2}.$

Nun legen wir die Archimedische Spirale mit dem laufenden Punkt $\Pi(\rho;\varphi)$ so durch den festen Punkt $A(a;\alpha/2)$, daß der Halbkreisbogen OPA der rechte Teil des Krümmungskreises der Spirale im Punkt 0 ist. Daher ist Π gekennzeichnet durch

(6,2) $\rho = a\varphi:\alpha/2$

---

[30] CP II, fol. 61ᵛ = CMH, 76–77. – Daß dieser Satz schon von ARISTARCH in der Schrift *De magnitudinibus et distantiis solis et lunae* verwendet wird, hat NIKOLAUS schwerlich gewußt.

[31] CP II, fol. 67ᵛ = CMH, 89–90.

[32] CN, 13–14 = CMH, 128–131.

[33] CN, 14 = CMH, 131.

[34] *Munimen adversus nova cyclometrica*, Paris 1594 = *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646= Hildesheim/New York 1970, 436–446, insbes. 440. Ich führe Viètes Satz in stark modernisierter Form vor.

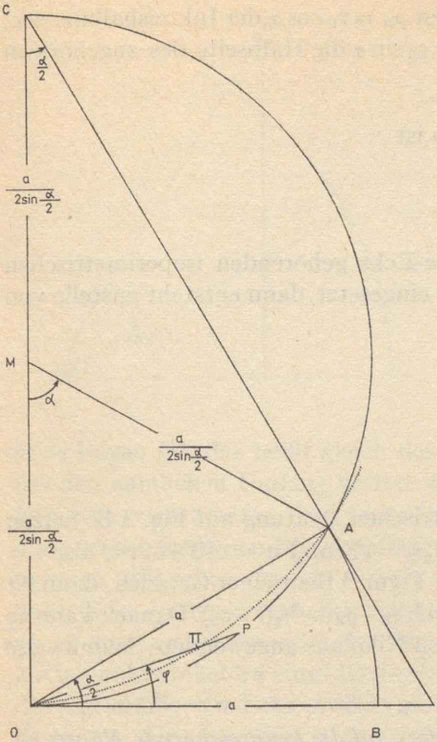


Fig. 4: Viètes Überführung der kennzeichnenden Näherung in eine Ungleichung

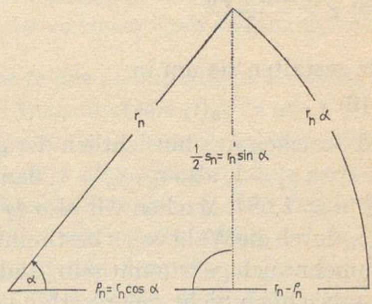


Fig. 5: Übergang vom regelmäßigen n-Eck zum isoperimetrischen Kreis

Nun gilt aber[35] für $0 < \varphi < \alpha/2 < \pi/2$:

(6,3) $\frac{\varphi}{\alpha/2} < \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha/2}$,

und folglich

(6,4) $\rho < r$.

Der Spiralenbogen OΠA liegt also innerhalb des Kreissegmentes OPA; also ist das Spiralsegment OΠA, dessen Fläche bekanntlich $1/6 \cdot a^2 \cdot \alpha/2$ ist[36], kleiner als das Kreissegment OPA mit der Fläche

(6,5) $\frac{a^2}{8\sin^2\alpha/2}[\alpha - \sin\alpha]$.

Wir erweitern mit 12, kürzen mit a^2 und beachten, daß $2 \cdot \sin^2\alpha/2 = 1 - \cos\alpha$ ist. So entsteht

(6,6) $\alpha < 3\,\frac{\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$ oder $\frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{2 + \cos\alpha}{3}$ für $0 < \alpha < \pi/2$.

Jetzt betrachten wir (Fig. 5) den Sektor eines Kreises vom Halbmesser r_n mit

[35] Gemäß Satz 5 *De mathematicis complementis*: vgl. oben Fußnote 30.
[36] ARCHIMEDES: *De spiralibus*, Folgerung aus Satz 26.

dem Mittelpunktwinkel $\alpha = \pi/n$. In ihm ist $\rho_n = r_n \cos\alpha$ der Inkreishalbmesser; r_n ist der Umkreishalbmesser und $^1/_2 s_n = r_n \sin\alpha$ die Halbseite des zugehörigen *n*-Ecks. Dessen Umfang ist

(6,7) $u = 2n \cdot r_n \sin\alpha = 2\pi \cdot r_n \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Also ist

(6,8) $r = r_n \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

der Halbmesser des zum regelmäßigen *n*-Ecks gehörenden isoperimetrischen Kreises. Wird in (6,6) mit r_n erweitert und eingesetzt, dann entsteht anstelle von (3,2) die kennzeichnende Ungleichung

(6,9) $r < \frac{2r_n + \rho_n}{3}$.

Wir gestalten sie um in

(6,10) $r - \rho_n < {}^2/_3(r_n - \rho_n)$

und beziehen uns hinsichtlich der geometrischen Deutung auf Fig. 3 B. Setzen wir etwa $\rho_3 = 1$, also $r_3 - \rho_3 = 1$, dann ist $^1/_2 s_3 = \sqrt{3}$ und $u = 6\sqrt{3} = 2r\pi$, also $r = 3\sqrt{3}/\pi = 1{,}654$. Machen wir also *gq* wie in Figur 3 B zu einer Geraden, dann ist $r - \rho_n$ durch die Wahl von *n* bestimmt, jedoch $r_n - \rho_n > {}^3/_2(r - \rho_n)$. Danach kann *hq* nunmehr auch gekrümmt sein, und die von Nikolaus angewendete Schlußweise ist tatsächlich nicht mehr verbindlich.

7. *Zur Rückführung eines speziellen Ansatzes auf die kennzeichnende Näherung*

Der Einwand Toscanellis scheint auf Nikolaus großen Eindruck gemacht zu haben. Vielleicht haben wir hier den Anlaß vor uns, der zur Komposition des zweiten Buches von *De mathematicis complementis*[37] geführt hat, das am 24. November 1554 zu Brixen abgeschlossen wurde. Leider enthält es ausschließlich spezielle Ansätze ohne umfassendere Bedeutung. Das gilt auch für einige weitere Versuche ähnlichen Charakters[38], nicht aber für den Ansatz in der bisher nur aus einer Handschrift bekannten Studie *De caesarea circuli quadratura*[39], die am 6. August 1457 in der Veste Andratz abgeschlossen wurde, wo Nikolaus von den Truppen des Herzogs Sigismund eingeschlossen worden war und sich zur Untätigkeit gezwungen sah.

Nikolaus will den Sechstelkreisbogen *fgh* (Fig. 6) geradestrecken. Zu diesem Zweck schneidet er den Schenkel *ag* des Winkels *fag* $= 30^0$ so in *e* durch ein passendes Lot *bec* zu *af*, daß das Stück *eg* zwischen Lot und Kreisbogen gleich der Hälfte des Abschnitts *ab* auf der Waagrechten wird. Dann schneidet er das Lot mit dem freien Schenkel des Winkels *bah* $= 60^0$ in *c* und behauptet, daß

---

[37] CP II, fol. 70^v–92^r = CMH, 92–127.

[38] Es handelt sich um drei kleinere Studien, auf deren Analyse ich verzichte: CN, 14–15 = CMH, 132–135; CN, 16–21 = CMH, 136–143; CN, 10–12 = CMH, 143–150.

[39] CMH, 151–159.

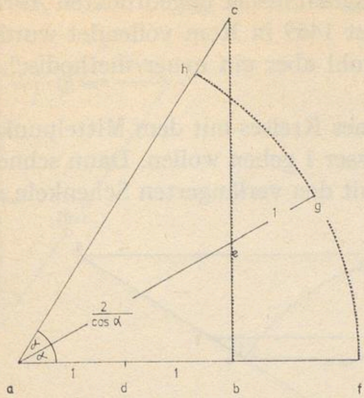


Fig. 6: Herstellung des gleichseitigen Dreiecks, das zu einem Kreis umfangsgleich ist

bc = Bogen *fgh,* das heißt gleich der Halbseite des gleichseitigen Dreiecks ist, das den nämlichen Umfang besitzt wie der Ausgangskreis.

Hier ist es zweckmäßig, die Fragestellung umzukehren, also wieder zur Ausrundung einer gegebenen Strecke überzugehen, und alles sinngemäß zu verallgemeinern. Wir sehen etwa $ab = 2$ als den Inkreishalbmesser ρ_n eines regelmäßigen n-Ecks an, bezeichnen den Winkel *bae* mit α und müssen nun $eg = 1 = {}^1/_2\rho_n$ an *ae* ansetzen. Gefragt ist die Beziehung zwischen dem Bogen *fgh,* der zum Mittelpunktwinkel 2α eines Kreissektors gehört, und der Halbseite $bc = {}^1/_2 s_n$ des regelmäßigen n-Ecks. Anders gesagt: Wie ist der Halbmesser *ag* des Kreises bestimmt, der zum Vieleck isoperimetrisch ist?

Gemäß der Figur ist $\mathrm{ag} = \dfrac{2}{\cos\alpha} + 1 = \dfrac{2+\cos\alpha}{\cos\alpha}$, also

(7,1) $\text{Bogen fgh} = 2\alpha \cdot \dfrac{2+\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

Anderseits ist

(7,2) $\mathrm{bc} = 2 \cdot \mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2\cdot\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{4\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Nikolaus will also haben, daß unter Annahme eines passenden Winkels α gilt: bc = Bogen fgh. Dies führt auf

(7,3) $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = (2+\cos\alpha)\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{2\cdot\cos^2 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot(2+\cos\alpha)$.

Wir werden hier auf (6,6) geführt, wenn $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = {}^1/_3$, d.h. wenn $\cos 2\alpha = {}^1/_2$ und folglich $\alpha = 30^0$ wird. Der Ansatz sieht also speziell aus und scheint beim ersten Blick keine Beziehung zum bisherigen zu haben. In Wirklichkeit läßt er sich auf die Bestimmung des Halbmessers jenes Kreises reduzieren, der zu einem regelmäßigen Sechseck umfangsgleich ist.

8. *Ein Ausgleichsverfahren zur Bogenausstreckung*

Um die Geradstreckung eines Bogens geht es auch in der letzten uns bekannten mathematischen Schrift, der wiederum im Original bisher ungedruckten *Aurea propositio in mathematicis*[40], die am 8. August 1459 in Rom vollendet wurde. Hier erscheint zwar kein neues Ergebnis, wohl aber ein neuer methodischer Gedanke.

Nikolaus zeichnet (Fig. 7) den Sektor *abdc* eines Kreises mit dem Mittelpunktwinkel 2α, dem wir zweckmäßig den Halbmesser 1 geben wollen. Dann schneidet er die zum Punkt *d* gehörige Tangente mit den verlängerten Schenkeln *ab*

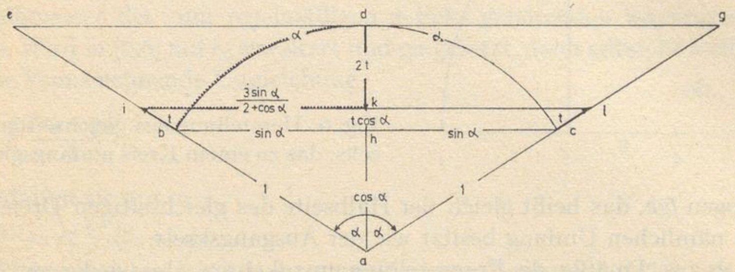


Fig. 7: Ausgleichsverfahren zur Streckung eines Bogens

und *ac* beziehungsweise in *e* und *g*. Um den Bogen *bdc* auszustrecken, bedient er sich eines „Ausgleichsverfahrens“: er „hebt“ die Punkte *b* und *c* auf den Schenkeln des Mittelpunktwinkels um die gleichen Strecken $bc = cd = t$ und „senkt“ *d* auf der Mittellinie um die Strecke $dk = 2t$. Wenn hierbei die Punkte *i*, *k*, *l* in eine und die nämliche Gerade fallen, dann ist seiner Meinung nach *il* ungefähr gleich Bogen *bdc*.

Hier haben wir $hd = t(2+\cos\alpha) = 1-\cos\alpha$, also $(1+t)(2+\cos\alpha) = 3$ und $ad - (1+t)\cos\alpha = \dfrac{3}{2+\cos\alpha}\cdot\cos\alpha$, somit $ki = ak \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3\cdot\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$. Wenn diese Strecke ungefähr mit dem Bogen $bd = \alpha$ übereinstimmt, dann haben wir die kennzeichnende Näherung in der Form der Ungleichung (6,6) vor uns.

9. *Von der näherungsweisen Ermittlung des Verhältnisses zwischen Kreisbogen und Kreissehne*

Was Nikolaus zur Ermittlung des Verhältnisses zwischen Kreisbogen und Kreissehne zu sagen hatte, steht in der Schrift *De mathematica perfectione*[41] und deren Vorform. Hier stoßen wir auf die folgende Behauptung[42] (Fig. 8):

> Ist α der Mittelpunktwinkel des halben Sektors eines Kreises und wird dessen Halbmesser $ac = r_n$ mit ① die Halbsehne $bc = {}^1/_2 s_n$ mit ② und der Abstand ab [$= \rho_n$] der Sehne vom Mittelpunkt mit ③ bezeichnet, dann ist

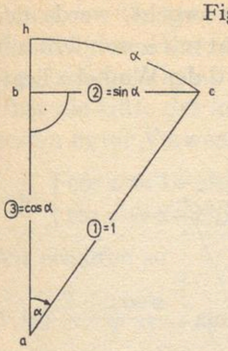
---

[40] CMH, 178–182.

[41] CP II, fol. 101^r–114^r = CMH, 160–177.

[42] CP II, fol. 101^v = CMH, 162–63. Der lateinische Text wird in Abschnitt 10c wiedergegeben.

Fig. 8: Zum Verhältnis zwischen Halbbogen und Halbsehne



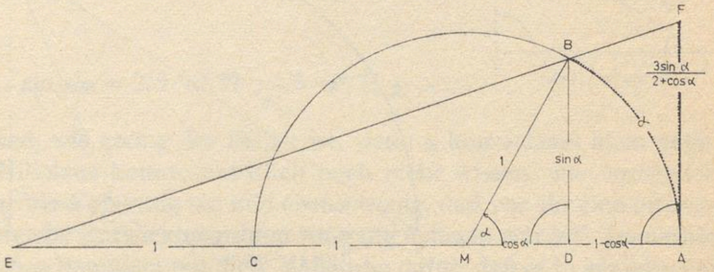


Fig. 9: Geometrische Darstellung der kennzeichnenden Ungleichung durch Huygens

$$(9,1)\quad \frac{\text{Halbbogen } hc}{\text{Halbsehne } bc} = \frac{3 \cdot \textcircled{1}}{2 \cdot \textcircled{1} + \textcircled{3}}$$

Erteilen wir hier dem Halbmesser r_n der Kürze halber den Wert 1, dann ist Bogen $hc = \alpha$, $bc = \sin\alpha$ und $ab = \cos\alpha$. Wir haben also wiederum die kennzeichnende Näherung vor uns, und zwar nach Vertauschung von Zähler und Nenner in Form der kennzeichnenden Ungleichung (6,6).

Die hieraus folgende Ausstreckung des Bogens ist von Chr. Huygens[43] besonders durchsichtig dargestellt worden. Die auch ohne nähere Erklärung des Aufbaus sogleich verständliche Konstruktion (Fig. 9) läßt erkennen, daß sich das Tangentenstück AF wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke EDB und EAF in der Form schreiben läßt:

$$(9,1)\quad \mathrm{AF} = \frac{3 \cdot \sin\alpha}{2 + \cos\alpha} < \alpha = \text{Bogen AB.}$$

Wir wollen hier nicht den rein elementar gehaltenen, jedoch ein wenig komplizierten Beweis von Huygens wiedergeben, vielmehr eine sehr durchsichtige Überlegung vorführen, deren Grundgedanke auf J. Chr. Schwab[44] zurückgeht. Sie beruht auf dem Übergang vom regelmäßigen n-Eck zu einem umfangsgleichen regelmäßigen $2n$-Eck.

---

[43] *De circuli magnitudine inventa*, Leiden 1654 = *Œuvres* XII, d. Haag 1910, 113–215 (mit gegenübergestellter französischer Übersetzung), insbes. prop. 16, S. 158–161.

[44] *Éléments de géométrie*, Nancy 1813.

In Fig. 10, die aus Fig. 9 durch Weiterentwicklung hervorgeht, werde der Mittelpunktwinkel AMB aus Zweckmäßigkeitsgründen nicht mit α, sondern mit 2α bezeichnet. Da nun im rechtwinkligen Dreieck DCB bei C der Winkel α liegt,

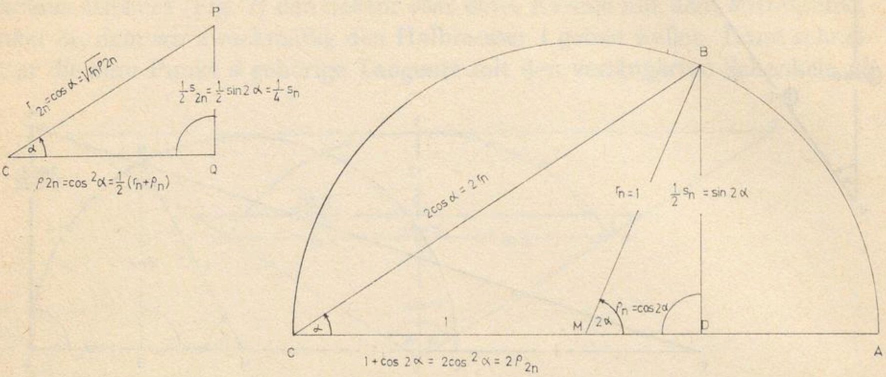


Fig. 10: Zum elementaren Beweis für die kennzeichnende Ungleichung

hat dieses Dreieck die Seiten $CD = 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. $DB = \sin 2\alpha = 2\cos\alpha . \sin\alpha$ und (nach dem Kathetensatz) $CB = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\alpha} = 2 \cdot \cos\alpha$. Wird es bei festgehaltenem C auf die Hälfte verkleinert, dann erhalten wir das Dreieck CQP. Es ist für das umfangsgleiche regelmäßige $2n$-Eck charakteristisch und hat die Seiten

$$(9{,}2) \quad \left\{ \begin{array}{l} CQ = \rho_{2n} = \cos^2\alpha = 1/2 \cdot (r_n + \rho_n), \\ QP = 1/2 \cdot s_{2n} = \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 1/4 \cdot s_n, \\ CP = r_{2n} = \cos\alpha = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}} \end{array} \right\}$$

Hieraus folgt

$$(9{,}3) \quad r_n = \frac{r_{2n}^2}{\rho_{2n}}, \; \rho_n = \frac{2\rho_{2n}^2 - r_{2n}^2}{\rho_{2n}}, \text{ also}$$

$$(9{,}4) \quad r_n - \rho_n = 2 \cdot \frac{r_{2n}^2 - \rho_{2n}^2}{\rho_{2n}} = \frac{s_{2n}^2}{2\rho_{2n}} \text{ und}$$

$$(9{,}5) \quad \frac{r_{2n} - \rho_{2n}}{r_n - \rho_n} = \frac{\rho_{2n}}{2(r_{2n} + \rho_{2n})} < 1/4$$

da ja $\rho_{2n} < r_{2n}$. Dies läßt erkennen, daß die Doppelfolge ρ_n, r_n mit zunehmendem n stark gegen r_∞ konvergiert.

Andererseits ist

$$(9{,}6) \quad (2r_n + \rho_n) - (2r_{2n} + \rho_{2n}) = \frac{(r_{2n} - \rho_{2n})^2}{\rho_{2n}} > 0, \text{ und daher}$$

$$(9{,}7) \quad \frac{2r_n + \rho_n}{3} > \frac{2r_{2n} + \rho_{2n}}{3} > \ldots > r_\infty, \text{ schließlich}$$

$$(9{,}8) \quad r - \rho_n < 2/3\,(r_n - \rho_n) \text{ und } r_n - r > 1/3\,(r_n - \rho_n).$$

Damit ist die kennzeichnende Ungleichung (6,9) erneut bewiesen, und zwar diesmal ohne Verwendung der von Viète herangezogenen Archimedischen Spirale. Gleichzeitig ist auch die Huygenssche Deutung bestätigt.
Über die Güte der kennzeichnenden Ungleichung (6,6) orientieren wir uns am besten unter Verwendung der Potenzentwicklungen

$$(9,9)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = 1-\alpha^2/2! + \alpha^4/4! - \alpha^6/6! \pm \ldots \\ \sin\alpha = \alpha - \alpha^3/3! + \alpha^5/5! \mp \ldots \end{array}\right\}$$

Wir erhalten so

$$(9,10)\quad \frac{2+\cos\alpha}{3} - \sin\alpha/\alpha = 2/3\cdot\alpha^4/5! - 4/3\cdot\alpha^6/7! \pm \ldots$$

Dies läßt erkennen, wie gering der Fehler ist, wenn α hinreichend klein angenommen wird. Nikolaus konnte natürlich noch nicht wissen, wie vorzüglich seine kennzeichnende Näherung ist, und ebensowenig, daß von ihr eine interessante und folgenreiche Entwicklung ihren Ausgang nehmen würde[45]. Immerhin zeugt sein vielfaches Bemühen um diese Näherung dafür, daß er in genialischer Vorahnung um Zusammenhänge, die damals noch nicht klar zu überblicken waren, etwas von der fachlichen Bedeutung seiner Untersuchungen vorempfunden hat.
Wir wenden uns nun zur Analyse der Handschrift, deren Text wir nach gedanklichen Einheiten in Abschnitte unterteilt haben, die nicht immer mit den Initialen der Vorlage übereinstimmen. Diese sind durch Kursivdruck kenntlich gemacht. Wo nötig, verweisen wir auf Texte oder entsprechende Wendungen in anderen Schriften des Nikolaus, vor allem auf solche in *De mathematica perfectione.*

Die Texte in der Vorform von De mathematica perfectione

10. *Begriffsbestimmung, Problemstellung, Hauptsatz* (Cod. Cus. 218, fol. 138ʳ, Z. 1–34)

a) *Textfragment* aus Z. 1–3: . . . mathematicam perfectionem, quae in adaequatione . . . in recta consistit . . .
Entsprechung in der endgültigen Fassung: CP II, 101ʳ = CMH, 162/63:

> Intentio est, ex oppositorum coincidentia mathematicam venari perfectionem. Et quia perfectio illa plerumque consistit in rectae curvique quantitatis adaequatione, propono habitudinem duarum rectarum linearum se ut cordam ad suum arcum habentium investigare, sciens illa habita me medium habere curvam quantitatem cum recta adaequandi, et quoniam ad has inveniendas necesse est me alicuius cordae ad arcum habitudinem scire, ut ex illa cognita pergere queam ad artem.

---

[45] Eine knappe Übersicht mit Hinweis auf ergänzende Literatur findet sich in J. E. Hofmann: *Rektifikation und Quadratur des Kreises in der Oberstufe*, in: Der Mathematikunterricht 7, Heft 3 (1961), 72–103, insbes. Abschnitt 17, Aufgaben 8–10 (S. 78–79) und Abschnitt 18 (S. 79–80).

b) *Textfragmente* aus Z. 4–34: Sed de centro ad finem – vel minoris arcus duae lineae ducantur et – vadit – termini – . . . arcus, sicud corda ad arcum – . . . per quae est habitudo . . . *ab* ad centrum
Entsprechung in der endgültigen Fassung: CP II, 101^{v} = CMH, 162/63:

Propositio

Si orthogonii latus, quo non est maius, ponitur linea prima et semidiameter circuli, et latus, quo non est minus, secunda linea et semicorda, et reliquum latus tertia linea : quae erit semiarcus ad semicordam habitudo, illa erit lineae aequalis tribus primis lineis ad lineam aequalem duabus primis cum tertia.

Ut si orthogonius est *abc* et *ac* latus, quo non est maius, prima linea et semidiameter circuli, et *bc* latus, quo non est minus, secunda linea et semicorda, et *ab* latus tertia linea, et *hc* semiarcus, et *de* aequalis tribus lineis *ac*, et *fg* aequalis duabus *ac* cum una *ab*: dico quod, quae est habitudo *hc* ad *bc*, illa est *de* ad *fg*.

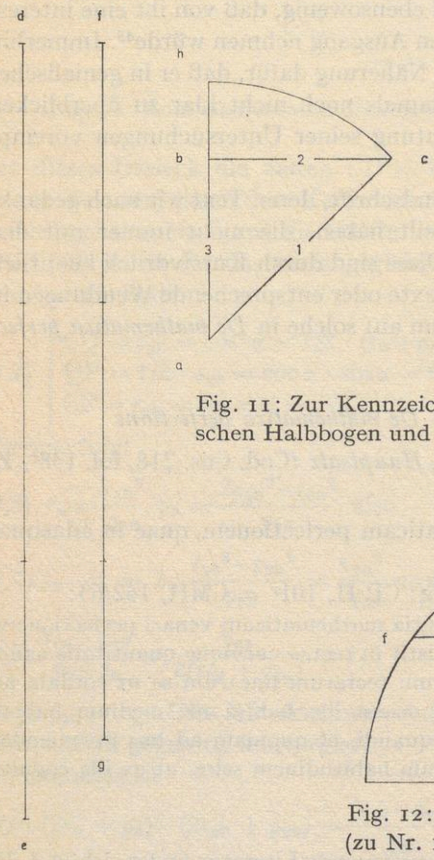


Fig. 11: Zur Kennzeichnung des Verhältnisses zwischen Halbbogen und Halbsehne

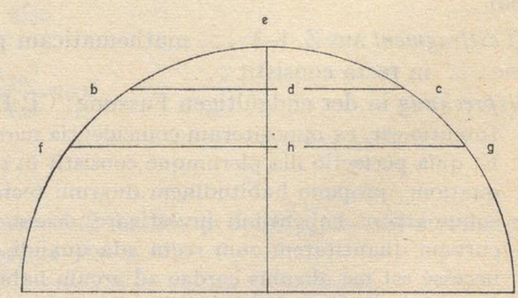


Fig. 12: Mit der Sehnenlänge nimmt der Pfeil ab (zu Nr. 11)

c) *weiteres Fragment*: . . . coincidentiam oppositorum . . .
Wahrscheinlich handelt es sich um eine Zwischenbemerkung, die zum nächsten Abschnitt überleiten soll.

11. *Zur mathematischen Grundauffassung* (fol. 138^{r}, 35–48; fol. 138^{v}, 1–18; Text anfangs nur fragmentarisch lesbar):

*E*st deinde considerandum, quomodo . . . proprietas visione intellectuali – quantitatem, puta lineae – videndo – essendi necessitatem, quae nec maior nec minor esse poterit . . ., video magnitudinem absolvendam, quod praemisi, scilicet mensuram . . . quantitatis . . . quaeque ut in magnitudine, sic de triangulo et circulo et corda, et sic video, quod sicud omnia de genere magnitudinis in necessitate essendi, ita . . . sunt ipsa magnitudo absoluta. Sic absoluta omnia; verum respectu . . . fuerit ipsa necessitas, et hac consideratione circulum verum – videre, ubi omnia sunt idem, scilicet essendi necessitas. Et igitur, sicud maximum – quando
fol. 138^{v} – necesse / est, ut dirigar visione intellectuali, quae illos in maximo pariter et minimo circulo in aequalitate intuetur. Dum enim intellectus intuetur circulum in essendi necessitate, ita scilicet, quod nec maior nec minor esse potest, ut sit maximus pariter et minimus, tunc videt absolutum circulum verum circulum complicare, et videt proportionem esse veram in eo, cum corda et arcus sint idem, et lineae, quae terminantur in corda, sint etiam illae, quae terminantur in arcu, ut haec consideranti nota sunt. Ex hiis igitur, quae ibi videt, scientiam habet proportione veram ex insensibilibus circulis, qui sunt explicationes complicationis absoluti circuli, ut in dictis libellis doctae ignorantiae tetigi. Sicud enim in sensibilibus corda et arcus varie differunt, quae sunt idem simplex in dicto maximo absoluto circulo, sic et proportionaliter lineae terminatae in illis differunt. Evenit hinc diversitas cordae et arcus in sensibilibus circulis, quia simplicitas primi et absoluti circuli non potest, uti est intelligibilis, fieri sensibilis, quia rectitudo circumferentiae eius, dum a sua perfectione descendit, in curvitatem devergit; ideo corda, quae arcui subtenditur, non potest esse ut arcus. Et quia forte non es assuetus in intellectualibus visionibus et nescis concipere coincidentiam maximi et minimi circuli, et quod circumferentia sit ut linea recta, quoniam nec ratio nec imaginatio haec capit – sunt enim illa ante divisibilem quantitatem ostendentia (?) virtutem omnem praeter intellectualem –, tamen recurre, ut concipere queas.

Das hier Ausgeführte ist deshalb von hohem Interesse für die mathematisch-philosophischen Grundauffassungen des Nikolaus, weil in *De mathematica perfectione* nur eine kurze Anspielung übergegangen ist: CP II, fol. 101^{r} = CMH, 161: Fortsetzung des in Abschnitt 10a gegebenen Textes:

Sed quomodo est possibile, me cuiusquam datae cordae ad arcum habitudinem scire, cum inter illas quantitates adeo contrarias forte non cadat numerabilis habitudo? Necesse erit igitur, me recurrere ad visum intellectualem: qui videt minimam, sed non assignabilem cordam cum minimo arcu coincidere; nam quanto corda minor, tanto sagitta adhuc minor, ut *de*, sagitta cordae *bc*, est minor quam *ge*, sagitta cordae *fc*, quia *bc* minor *fc*, et ita consequenter.

Der Hinweis (Z. 19) auf *De docta ignorantia*[46], lib. I, cap. 8 bezieht sich auf die Betrachtung aller Kreise, die einander auf der einen Seite einer gemeinsamen Tangente berühren – hierzu vgl. den Text im Abschnitt 12 – und ist wohl durch Bradwardine angeregt[47]. Schon im Text der *De docta ignorantia* finden sich die Fachbezeichnungen (Z. 24) *rectitudo* und (Z. 25) *curvitas*[49]. Auch die nachfolgende Betrachtung über den Kontingenzwinkel geht wohl auf die erwähnte Stelle bei Bradwardine zurück[50].

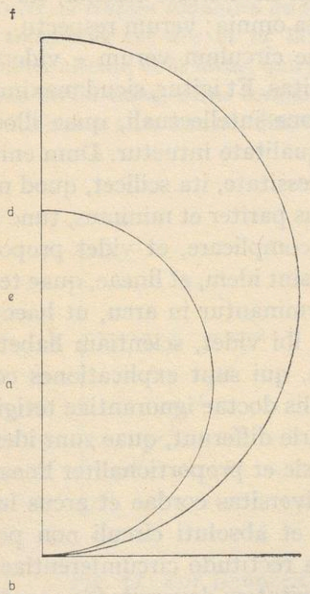


Fig. 13: Zur Kontingenzwinkelfrage

12. *Kontingenzwinkelfrage* (fol. 138^v, 18–30):

*E*t attende, quod quanto circulus fuerit maior, tanto angulus ex semidiametro et circumferentia similior angulo recto et angulus contingentiae minor, ut si *b* est punctus in circumferentia, ad quem de centro *a* ducitur semidiameter *ab* et de *b* contingens *bc*, angulus *abc* est minor quam si de *e*

---

[46] CP I, fol. 1^r–34^v, insbes. fol. 5^v = *Opera omnia* (im folgenden zitiert als *CO*) I, Leipzig 1932, 25–26. Man vgl. ferner die von P. Wilpert besorgte lateinisch-deutsche Ausgabe, Bd. I, Hamburg 1964, Abschnitt 35.

[47] *Geometria speculativa*[7], *Tractatus* II, *cap.* 4, *conclusio* 6. Zur Vorgeschichte vgl. man J. E. Hofmann: *Mutmaßungen über das früheste mathematische Wissen des Nikolaus von Kues*: MFCG 5 (1965), 98–136, insbes. 115–119.

[48] CO I, S. 26, Z. 19.

[49] CO I, S. 26, Z. 5–6, 13, 14.

[50] Zur Kontingenzwinkelfrage sehe man Hofmann[47], 115–121.

centro distantiori duceretur linea ad circumferentiam, erit angulus contingentiae minor, quia minor est *cbf* quam *cbd*. Quare si circulus fuerit simpliciter maximus seu infinitus, erit ille angulus rectus et nullus angulus contingentiae, sed arcus erit linea contingens, et quoniam circumferentia est infinita, erit medietas eius infinita et aequalis diametro. Sic etiam verum est in minimo. Nam quanto semicirculus fuerit maior, tanto quantitas, qua arcus excedit cordam, minor. In minimo igitur quantitas *ab* nulla est. Et ita erit arcus semicirculi ut diameter in minimo sicut in maximo. Et ut non haesites coincidentiam maximi et minimi sive aequalitatem tollere quantitatem, quae tibi videre impedit, quomodo maximum et minimum simpliciter praeveniunt quantitatem, et tunc videbis intellectualiter, quae praemisi.

5: *versehentlich* ad b *statt* ad *Msk.*
8: circumferentia *verbessert* Nikolaus *aus* diameter

Die Frage nach dem Wesen des Kontingenzwinkels (zwischen Kreisbogen und Tangente) war schon von den hellenistischen Mathematikern eingehend diskutiert worden. Hiervon zeugt, was Proklos Diadochos[51] in den Erläuterungen zur Winkeldefinition (Euklid, *Elemente I*, Def. 8) ausführt. Das Wort *angulus contingentiae* (Z. 2 u. ö.) findet sich bei Nikolaus schon früher[52]; die Kontingenzwinkelfrage wird ausführlich diskutiert in der *De circuli quadratura*[53], die am 15. Juli 1450 zu Rieti abgeschlossen worden war. Die Figur ist von uns ergänzt im Anschluß an das, was sich in *De docta ignorantia*[54] vorfindet; der Gegenstand erscheint wieder in *De venatione sapientiae*[55] Kap. 26.

13. *Zum Infinitesimalproblem*

Cod. Cus. 218, fol. 138^v, 31–40

*N*ec devertiendum, quod quanto arcus fuerit maior, tanto corda ei

CP II, 101^r/101^v = CMH, 161/62

Minima igitur corda, qua minor dari non posset, si signabilis foret, non

[51] *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, griechische Erstausgabe ed. S. Grynaeus zusammen mit Euklids *Elementen*, Basel 1533. Einzelne Stücke waren von arabischen Übersetzern in ihre Euklid-Bearbeitungen übernommen worden und finden sich in deren lateinischen Übersetzungen. Eine davon war die Vorlage Bradwardines.

[52] Diese Bezeichnung erscheint erstmals in der *De correctione Kalendarii* (etwa 1436/37): CP II, fol. 22^r–29^r, insbes. fol. 23^r. Ich verweise ferner auf die lateinisch-deutsche Ausgabe von V. Stegemann–B. Bischoff, erschienen unter dem Titel: *Die Kalenderverbesserung*, Heidelberg 1955, S. 18–19.

[53] Der lateinische Text ist noch nicht herausgegeben. Zum Inhalt vgl. CMH, 36–57, insbes. 39–40 und 44–45.

[54] CO I, S. 26.

[55] CP I, fol. 201^r–218^v, insbes. fol. 211^r–211^v. Man vgl. ferner die lateinisch-deutsche Ausgabe von P. Wilpert, Hamburg 1964, Abschnitt 75–76, S. 112–117. Zur kritischen Beurteilung des von Nikolaus Vorgeführten sehe man Hofmann[47], 120–121.

aequalior, et ideo, si arcus fuerit simpliciter maximus, erit corda ei aequalis, ut si *bc* sit corda quadrantis, arcus *bc* erit maior corda, et quanto arcus fuerit minor, ut *de*, tanto corda ei similior. Esto igitur, quod *fg* sit minimus arcus, quo minor dari non possit, erit corda *fg* aequalis arcui. Propositio igitur erit vera:

In omni circulo, quando intellectus ad minimum arcum et cordam, quae ante quantitatem, intuetur, et quando omnes lineae, quae in interna corda terminantur duos minores orthogonios conficientes, ut et tres lineae, quae in corda quadrantis terminantur, duos maximos orthogonios terminant.

Et tunc, sicud propositio est vera in minimis, ita et in maximis.

haberet sagittam, et ita etiam non foret minor arcu suo. Coincideret igitur ibi corda et arcus, si ad minimam quantitatem in talibus deveniretur. Hoc videt bene intellectus necessarium, licet sciat, nec arcum nec cordam (cum sint quantitates) esse simpliciter minimas in actu et posse, cum continuum sit semper divisibile. Ad hauriendam autem scientiam habitudinis respicio ad intellectualem visionem, et dico me videre, ubi est cordae et arcus aequalitas, scilicet in simpliciter minimo utriusque. Ex hac visa aequalitate pergo ad inquirendum intentum medio trianguli orthogonii . . .

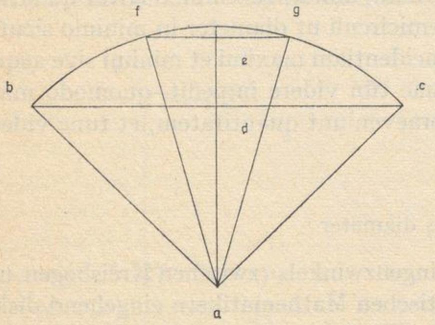


Fig. 14: Zum Infinitesimalproblem

19–21: ut *aeg* et *aef* et ut *adc* et *adb* Nikolaus *am Rande*

Dieser Text, zu dem wir die Erläuterungsfigur hinzugefügt haben, ist in interessanter Abwandlung in *De mathematica perfectione* übergegangen, die wir in Gegenüberstellung bringen. Er setzt die in Abschnitt 11 wiedergegebenen Ausführungen über die Beziehung zwischen Pfeil und Sehne fort. Ihm folgt dann der Text in Abschnitt 10b. Der Gegenstand ist von größter mathematischer Bedeutung; denn wir haben hier den ersten Versuch vor uns, vermittels der *visio intellectualis* einen direkten Grenzübergang vorzubereiten. Wir befinden uns also im Vorfeld des Infinitesimalen.

14. *Zur Kennzeichnung des charakteristischen rechtwinkligen Dreiecks eines regelmäßigen Vielecks* (fol. 138^{v}, 40–43; 139^{r}, 1–9):

*U*t autem statim dicta et dicenda clarius intelligas, notabis trigonum orthogonium tria latera habere: unum, quod recto angulo oppositum est, quo non est maius et vocetur primum; secundum quo non est minus , et tertium, quod nec est maius primo nec minus secundo, quo non est minus, et tertium, quod nec est maius primo nec minus secundo. Orthogonius autem in suo genere minus est orthogonio, cuius secundum latus / non potest esse minimum et maximum, cum eius secundum latus non

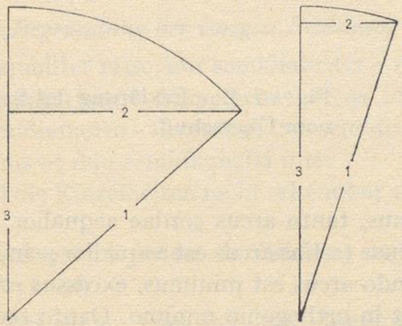


Fig. 15: Das charakteristische rechtwinklige Dreieck

potest esse maius, et hoc erit, quando est aequale tertio; nam cum secundum sit, quo non est minus, tunc non potest esse maius tertio; alias tertium foret secundum. In minimo igitur orthogonio tertium latus aequatur primo, in maximo tertium latus aequatur secundo. In orthogonio vero maximo pariter et minimo etiam pariter videt intellectus. Quia solus autem maximus orthogonius – sensibilium orthogoniorum sensibiliter attingitur in aequalitate laterum rectum angulum constituentium. Minimus vero solo intellectu videtur, cum nulla sensibilis linea possit dari, quin minor sit dabilis intellectui vero. Qui indivisibile intuetur minimum orthogonium solum, sic et maximum pariter et minimum intuetur.

Die von Nikolaus gewählte Bezeichnung für die Seiten des charakteristischen rechtwinkligen Dreiecks eines regelmäßigen Vielecks findet sich in *De mathematica perfectione* schon in der Fassung des Hauptsatzes (Abschnitt 10b). An diesen schließt sich ein mit dem vorliegenden verwandter sehr kurzer Text an, aus dem wir die von uns ergänzte Figur entnommen haben. Ähnlich drückt sich Nikolaus auch in dem Abschnitt aus, der in *De mathematica perfectione* dem Hauptsatz vorausgeht und in Abschnitt 13 wiedergegeben ist.

15. *Zur Herstellung der kennzeichnenden Näherung als Gleichung* (fol. 139^{r}; 10–21):

*N*unc probatur propositum, quod quanto corda quadrantis sit – cuius secundum latus est medietas, semper excedit duas tertias arcus sui, et

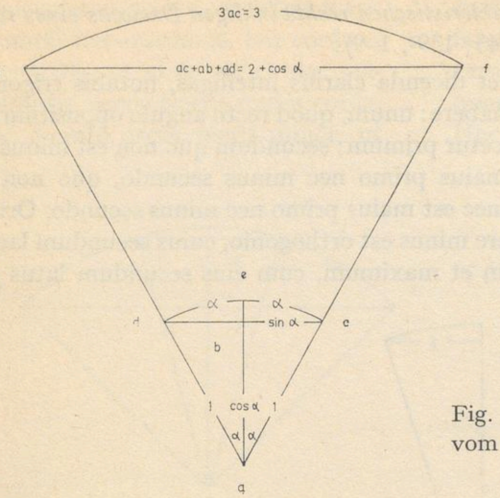


Fig. 16: Zur Erklärung des Satzes vom Überschuß

quanto secundum latus est minus, tanto arcus cordae aequalior, et ideo excessus illius cordae excedens duas tertias arcus est aequalior primo lateri, quod ponitur tertia arcus. Quando arcus est minimus, excessus est maximus et aequalis primo lateri, ut in orthogonio minimo. Qanto secundum latus est maius, tanto arcus plus excedit cordam; ideo excessus, quo corda excedit duas tertias arcus, est minor, et sic secundo lateri aequalior. Quando erit arcus aequalis cordae, secundum latus fuerit nullum, tunc excessus est minimus et aequalis secundo lateri. – in orthogonio est maximus, et quia igitur in minimo orthogonio – tertio lateri, quod est aequale, quia est ut excessus, sic et in maximo orthogonio et in minimo aequale. Tertium est ut dictus excessus, et ideo tertium latus semper – semidiameter et tertia pars arcus, cuius secundum latus est semicorda.

Für diesen Text gibt es keine unmittelbare Entsprechung in *De mathematica perfectione*. Er scheint zunächst wegen der nicht ausfüllbaren Lücken unverständlich zu sein. Nehmen wir jedoch das hinzu, was in der endgültigen Fassung[56] unter Beifügung einer Figur gesagt wird, die wir hier ergänzen, dann ist eine sinnvolle Deutung möglich.

Wir gehen zunächst aus vom Kreissektor *acd* mit den abschließenden Radien *ac* = *ad* [= 1], dem zugehörigen Mittelpunktwinkel *cad* [= 2α], dem zugehörigen Bogen *ced* [= 2α], der Sehne *cbd* [= 2·sinα] und der Mittellinie *abe* mit *ae* = 1, *ab* = cos α. Dabei beschränken wir uns mit Nikolaus auf den Bereich $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ ($\sim 45^0$), wo die kennzeichnende Näherung mit erträglicher Genauigkeit zutrifft. Nun verlängern wir die Radien so, daß *af* = *eg*, wobei

(15,1) $\mathrm{fg} = \mathrm{ac} + \mathrm{ab} + \mathrm{ad} = 2 + \cos\alpha$,

---

56 CP II, fol. 102^r = CMH, 166.

und ergänzen den Bogen fg um a durch f und g. Hier ist die kennzeichnende Näherung als Gleichung erfüllt, wenn wir Bogen $fg = 3 \cdot ac$ machen; denn dann ist

(15,2) $fg : \widehat{fg} = cbd : \widehat{ced}$, d. h.

(15,3) $(2 + \cos\alpha) : 3 = 2 \cdot \sin\alpha : 2\alpha$.

Jetzt sind 2/3 des Bogens $\widehat{fg}$ gleich 2, also

(15,4) Sehne fg – 2/3 Bogen $\widehat{fg} = \cos\alpha = ab$.

In diesem Sinne sind also die von Nikolaus gemachten Aussagen richtig.

16. *Zur Begründung der vorigen Beziehung* (fol. 139^r, 22–28):

Aequaliter ratio, cur semidiameter – nam minima corda est aequalis arcui. Excedit igitur duas tertias arcus in tertia linea, et excessus aequatur semidiametro – necesse et tres semidiametri et arcus et duo semidiametri et arcus et duo semidiametri inter –.

Obwohl die Einzelheiten nicht erkennbar sind, wissen wir doch, was gemeint ist.

17. *Beweisversuch für die als Gleichung angesehene Näherungsregel* (fol. 139^r, 29–41; 139^v, 1–24):

*A*io adhuc: linea minor ad dimidium tertiae partis – linea de centro ad medium arcus ducta nunquam est minor quam – est maior, eius pars, et haec per totum, et in minimo arcu ad medium – est et excessus minoris quadrantis et in eam corda minoris arcus –.

Respondeo, quod – tertia pars arcus, aliud orthogonium est sumptum, quod si sumpseris – cordae, quotiens volueris, vel e termino resolvens – semicordam faciens ut volueris – de lineis et lineae excessuum, et hoc est . . . cordae quadrantis, quae sit *ik*, et –

dico, si *lk* semidiameter circuli cum quotiens volueris ex lineis partem in
fol. 139^v infinitum, resultarent / ex quatuor illis lineis quatuor lineae excessuum, et si *lk* sumeretur cum novem lineis *al*, resultarent decem lineae excessuum, et ita in infinitum. Dico lineam excessuum esse ut supra, quae se habet ut excessus, quae corda *ik* excedit duas tertias arcus sui *ik*, posito quod *ab* semidiameter, *fr* (?) corda arcus.

Probatur, argumentum datur: Corda, puta *bc*, ubi semicorda *dc* excedit lineam *ad*, quae si sumitur cum quotquot volueris *ad* lineis, resultabunt tot lineae, quae sunt omnes maiores quam tot excessus. Patet hoc; nam cum *ad* linea nunquam sit minor excessu per suppositum, et *dc* semicorda sit maior quam *ad*, ideo datum est argumentum etiam in minima corda *fg*, ubi scilicet semiarcus est medietas cordae per intellectum, et tot lineae, quot volueris, resultabunt lineae excessibus minores. Patet, quia *eg* semicorda est minor *ac* linea, et *ae* est aequalis excessui ut supra. – medio, ubi semicorda cum quotquot volueris lineis a centro per medium cordae ductis efficit tot lineas, quae sunt tot lineis excessuum aequales.

Patet, quia sunt *ef* datae maius et minus, igitur et aequales. Hoc autem esse nequit nisi ubi semicorda fuerit ut linea a centro ad medium cordae ducta, ut in corda quadrantis; tunc enim semicorda seu linea a centro ad medium cordae necessario erunt ut quaeris, et ut quisque in se ipso hoc necessarium esse intuetur.

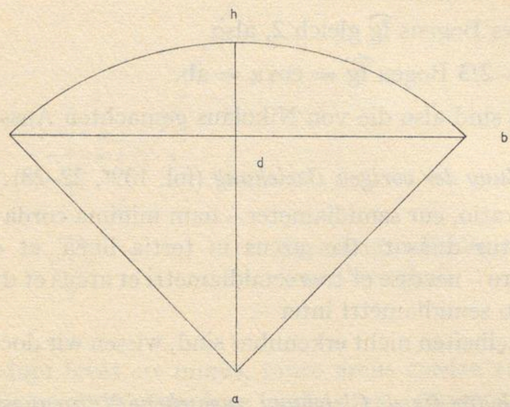


Fig. 17: Zum Beweisversuch für die Näherungsregel

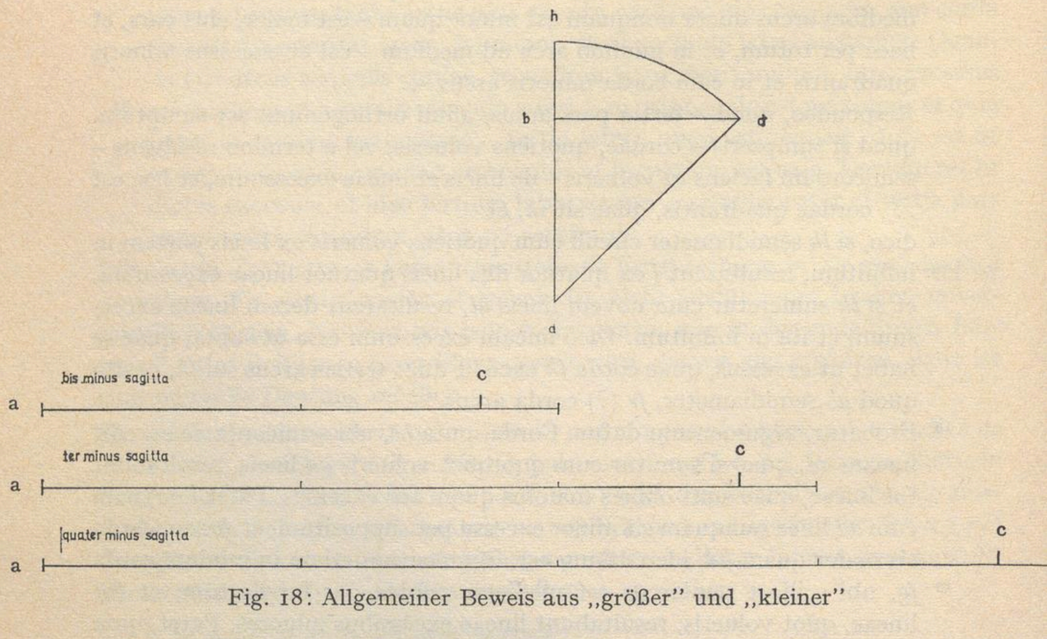


Fig. 18: Allgemeiner Beweis aus ,,größer'' und ,,kleiner''

Potest id ratione autem videri. Probatio sic datur: ubi linea de centro ad medium cordae, quotiens volueris, cum excessu unico est maior quam tot semicordae, scilicet quando semicorda est minor linea et excessu, ut in corda lateris ⟨h⟩exagoni. Et datur, ubi minor, scilicet ubi semicorda maior linea et excessu, ut in corda lateris tetragoni; datur igitur, ubi aequales, ubi linea excessus et semicorda aequantur, ut in corda quadrantis, ubi talium linea cum semicorda aequatur, aliter et excessus.

Leider ist aus den Fragmenten des ersten Textdrittels nur wenig zu entnehmen. Erkennbar ist, daß es sich um einen tastenden Versuch handelt, die Näherungsregel zu beweisen. Die Figur, auf die Nikolaus in einer Randnote zu fol. 139^r, Z. 38 hinweist: *verte ad figuram*, ist unten auf fol. 139^v erkennbar, wenngleich nicht ganz vollständig. Sie bezieht sich auf den Text ab Z. 15, ist jedoch auf den Quadranten bezogen. Daß hier zunächst $dc > ad$ angenommen wird, ist überraschend. Vielleicht ist in dem vorausgehenden unzugänglichen Text gesagt worden, daß man durch Halbieren oder fortgesetztes Halbieren zum normalen Fall $dc \leq ad$ kommen kann. Um zu verstehen, was gemeint ist, greifen wir auf entsprechende Stellen in *De mathematica perfectione* zurück. Dort stoßen wir zunächst auf einen vorbereitenden Satz[57], der in moderner Form so lautet: Es gibt stets eine Strecke t so, daß

$$(17,1)\quad \frac{\text{Bogen } \widehat{\text{bc}}}{\text{Sehne bdc}} = \frac{\text{ac} + \text{t}}{\text{ad} + \text{t}}$$

Etwas später finden wir wie in Z. 34 eine auf das Quadrat, d. h. auf den Viertelkreisbogen gestützte Hilfsbetrachtung[58], vermittels deren Nikolaus t bestimmt: Um den Archimedischen Näherungswert $\pi < 3^1/_7$ einfach anwenden zu können, setzt Nikolaus im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck abd $ab = 7$, also $ad = db \sim 5$, $dh \sim 2$, Bogen $bhc = 5^1/_2$, hat also $5^1/_2 : 5 = 11 : 10 = (7 + \text{t}) : (5 + \text{t})$. Hier setzt er nun $\text{t} = (\lambda - 1) \cdot ab$ unter Annahme eines ganzzahligen Wertes von λ, und führt die Andeutung näher aus wie folgt: Für $\frac{7+\text{t}}{5+\text{t}}$ erhält er mit $\lambda = 2: 14/12 > 11/10$, und mit $\lambda = 4: 28/26 < 11/10$. Daraus schließt er mit „größer und kleiner" auf $\lambda = 3$. Dies würde auf den nur wenig zu großen Näherungswert 21/19 führen.

In Z. 33 wird angedeutet, Entsprechendes lasse sich auch am regelmäßigen Sechseck, d. h. am Sechstelkreis, durchführen. Das wäre also die oben in Abschnitt 7 erwähnte Näherung. Setzen wir etwa $ab = 14$, dann ist $bd = 7$, $ad \sim 12^1/_8$, Bogen $bhc \sim 7^1/_3$; wir haben also $7^1/_3 : 7 = 22 : 21 \sim [112 + (\lambda - 1) \cdot 112 : [97 + (\lambda - 1) \cdot 112]$ und erhalten mit $\lambda = 2: 224/209 > 22/21$ und mit $\lambda = 4: 448/433 < 22/21$. Der ganzzahlige Mittelwert $\lambda = 3$ würde auf den etwas zu großen Näherungswert 336/321 führen.

Das hier Ausgeführte wird in *De mathematica perfectione* auch in allgemeiner Form wiedergegeben und durch eine beschriftete Figur (Fig. 18) erläutert[59], die

---

[57] CP II, fol. 101^v–102^r = CMH, 164–165 + 247, Anmerkungen 7–8.

[58] CP II, fol. 102^v = CMH, 168–169.

[59] CP II, fol. 102^v = CMH, 168.

in enger Verbindung zu Fig. 11 steht, so daß eine weitere Erklärung überflüssig ist. Eine ähnliche Figur scheint auf fol. 139r unten angedeutet zu sein, jedoch ist nur mehr die allgemeine Anlage erkennbar. In *De mathematica perfectione* ist die Ausdrucksweise durch Einführung des Fachwortes *sagitta* für die Differenz *ah* – *ab* wesentlich vereinfacht; daß Nikolaus in der Vorform dieses ihm wohlbekannte Fachwort[60] vermeidet, deutet vielleicht darauf hin, daß er sich an einen Partner wendet, der nur mit den einfachsten Grundbegriffen der Euklidischen Geometrie bekannt war.

18. *Über die Art der charakteristischen rechtwinkligen Dreiecke* (fol. 139v, 24–42):

Si attendis ad superiora, rationem de facili reperies, cur linea de centro ad medium maioris cordae, quam sit corda quadrantis ducta, non est ut excessus; nam haec praxis in orthogoniis a minimo usque ad maximum veritatem habet, et linea de centro ad medium cordae quadrantis, cum sit ut medietas cordae, quia cum semidiametro constituit maiorem orthogonium. non sic si linea ducitur de centro ad medium cordae maioris arcus, cum illa linea sit minor quam medietas cordae, sicud *ad*, ducta ad medium *bc* cordae arcus maioris quam sit quadrans, et ideo orthogonius *adc* minor quam ille alius; et ita semicorda *dc* non est secundum latus, quo non est minus linea de centro ad medium cordae ducta, sed *ad* est secundum latus; et ita patet, quod non est possibile lineam, quae ducitur de centro ad

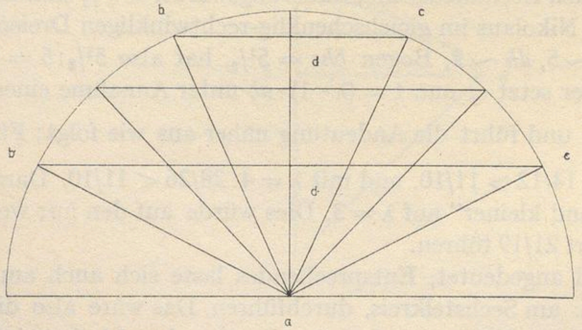


Fig. 19: Zur Kennzeichnung der zulässigen charakteristischen Dreiecke

medium cordae maioris arcus, qui est quandrans, esse ut excessum, cum sit secundum latus. Sed si illa, scilicet *ad*, ponitur semicorda ut prius, tunc tertium latus est excessus, scilicet medietas maioris cordae, puta *dc*, et ita vides, quare in corda quadrantis linea excessus, quae ducitur de centro ad

[60] Das Fachwort *sagitta* findet sich schon in mathematischen Schriften und Übersetzungen des 14. Jhdts. Erwähnt sei hier das Auftreten in der *Quadratura circuli*: CN, 9 = CMH, 67 und in *De mathematicis complementis*: CP II, fol. 62v–63v = CMH, 80–85.

medium cordae, aequatur semicordae; nam est medium coincidentiae, quoniam si descenderis versus diametrum, semicorda manebit semper linea excessus, et si ascenderis versus circumferentiam, linea de centro ad medium cordae semper manebit ut excessus; quare in medio coincidunt, scilicet semicorda est semicorda et excessus, sic et linea de centro ad medium cordae est ut semicorda et excessus; et in uno aequaliter coincidunt, ut quaelibet sit secundum latus et similiter tertium.

Dieser Text wird in *De mathematica perfectione* wesentlich gestrafft[61]:

> *O*rthogonius est tanto minor, quanto prima linea tertiam minus excedit. Si igitur posset dari minimus orthogonius, prima tertiam non excederet, et quia secunda linea foret minima, tunc cum ponatur semicorda, ipsa non foret minor semiarcu secundum praemissa.
>
> Maximum autem orthogonius est, quando prima tertiam excedit maxime; et hoc erit, quando tertia erit ut secunda, qua non est minor, et tunc secunda est semicorda quadrantis.

Der Text schließt sich als *Declaratio propositionis* an die Wiedergabe des Hauptsatzes (Abschnitt 10b) an. Eine ausführlichere Begründung für seine Einschränkung gibt Nikolaus in der *Aurea propositio in mathematicis*[62]:

> *R*atio, cur propositio de duobus semirectis, qui rectum angulum faciunt, et minoribus et non universaliter de omnibus angulis loquitur, haec est, quia a minimo arcu et portione circuli usque ad quadrantem triangulus ex orthogoniis compositus et portioni circuli inscriptus continue augetur et fit maximus in quadrante, post minuitur. Et ideo non potest propositio aeque vera esse arcu cum portione et triangulo crescente atque arcu cum portione crescente et triangulo decrescente.

Sein Vorgehen hängt damit zusammen, daß Nikolaus die Eigenschaften der Figur vom Minimum (Nullbogen) bis zum Maximum (Viertelkreisbogen) verfolgen will, um aus der Betrachtung in den beiden Extremen auf Eigenschaften in den „mittleren" Lagen schließen zu können.

19. *Zur Ausstreckung eines Kreisbogens*: Cod. Cus. 218, fol. 140^{r}, 1–10

Cod. Cus. 218, fol. 140^{r}, 1–10

*H*abemus nunc medium, habitam(?) rectam in circumferentiam et e converso circumferentiam in rectam contendi, et quomodo ad lineas, accipe . . . circumferentiam aliquam in . . . poteris cum integro arcu et – Iterum si maior quadrante, accipito eius medietatem aut al-

CP II, 106^{r}/106^{v} = CMH 171/172

Datum arcum in rectam resolvere

Arcus enim, si est quadrans et minor, ipsum sic recipito: Si maior, partem eius recipito aliquotam, quae sit quadrans aut minor. Et sit *bc*, arcus quadrantis, in rectam resolvendus: trahe de *a* centro lineas per *b* et *c* in infinitum, et aliam ad medium cordae, scilicet *ad*, et inter infinitas lineas unam

---

[61] CP II, fol. 101^{v} = CMH, 163.

[62] CMH, 180.

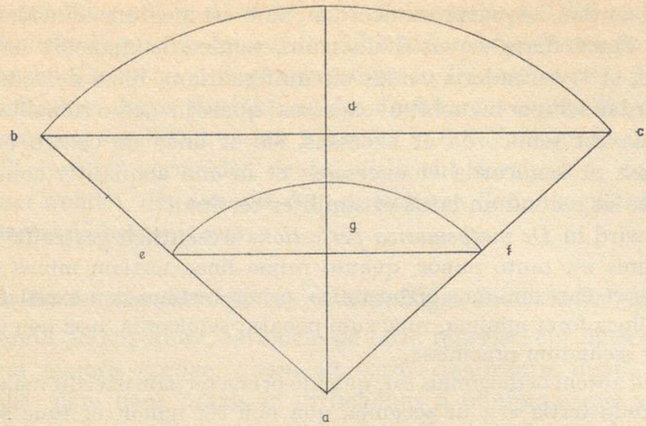


Fig. 20: Ausstreckung eines Kreisbogens (Cod. Cus. 218, fol. 140^{r}, Z. 1-10)

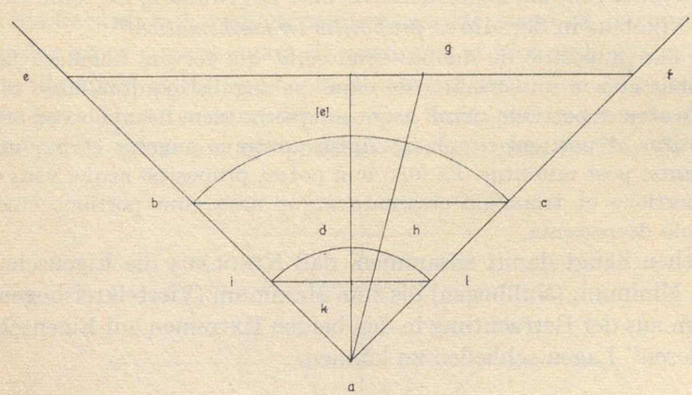


Fig. 21: Ausstreckung eines Kreisbogens (CP II, fol. 106^{r-v})

iam partem aliquotam – quadrantem, cuius *bc* est corda, in rectam redigere proponis *ab* et *ac* et ad medium eius *ad*, et tripertias lineam, quae aequedistanter ad *bc* tracta de linea – *ac* sic se habeat, quod tres lineae per ipsam de *ab*, *ad* et *ac* abscisae sint, – corda *bc*, puta sit linea *efg*, et *ae*, *af* cum *ag* sint ut *bc* corda quadrantis, tunc *ac* ter sumpta erit ut arcus, cuius – ex habitudine coincidentium.

aequedistantem ad *bc* cordam describe, quae sit aequalis *ab*, *ad* et *ac*, et sit *ef* aequalis illis. In *ef* signa *ab*, et sit *fg* ut *ab*, et trahe *ag* lineam; notando, ubi *bc* cordam secat, ponendo *h* liter am. Dico *hc* esse tertiam arcus. Tripla igitur *hc*, et redegisti arcum in rectam. Vel trahe aequedistantem ad *bc* versus centrum, quae sit *ikl*, ita quod *ai*, *ak* et *al* simul aequentur *bc* cordae, et *ai* erit tertia arcus. Haec omnia de se patent.

Der leider nicht völlig einwandfrei entzifferbare Text der Vorform ist in der endgültigen Fassung mit Glück verändert. Die Figur ist auf fol. 139^{v} unten angedeutet, in *De mathematica perfectione* durch Beifügung der Geraden *ahg* erweitert.

20. *Ausrundung einer Strecke*

a) Cod. Cus. 218, fol. 140^{r}, 11–21

1 Quae – scripta, ut sit *de*, vertere in curvam lineam *ab*, et in ea signo tertiam *ab* lineae, quae sit *ef*, et reperio cordam unam, scilicet . . .,

CP II, 106^{v} = CMH, 172

Datam rectam in arcum resolvere. Sit *ab* recta, quam si vis in quadrantem alicuius circuli resolvere, fac de *o* centro lineas, quae rectum angulum

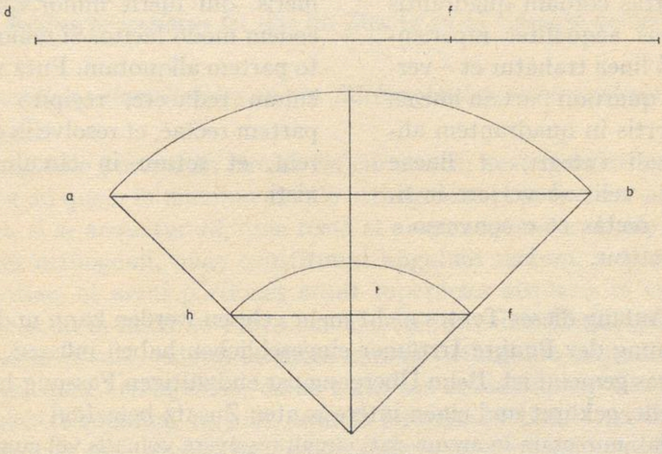


Fig. 22: Ausrundung einer Strecke (Cod. Cus. 218, fol. 140^{r}, Z. 20-21)

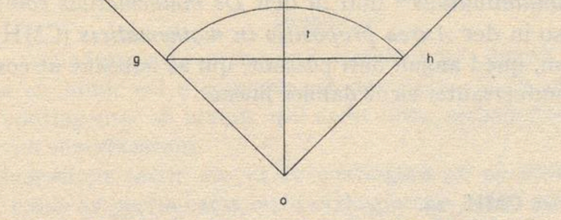


Fig. 23: Ausrundung einer Strecke (CP II, fol. 106^{v})

ita quod lineam traho ad *e*, quae sit *ce*, et aliam ad *i*, medium cordae, scilicet *eg*, tunc linea ex termino cordae aequalis *ce* est. Sit *fhi*, ita quod *cf*, *ch* et *ci* aequantur *de* cordae, tunc linea *ab*, cuius *cf* est tertia, aequabitur arcui *de*.
Et si *ab* vertere volueris in quadrantem alicuius circuli, circumferentiam circulo, quae quadranti circa *i* centrum respondet, scilicet recto angulo illius . . . procedendo, ut praemittas cordam quadrantis tribus lineis aequaliter reperiendam . . . *ab* linea trahatur et – verte ut prius quartam partem lineae, et illam vertis in quadrantem alicuius circuli integri, et lineae aequatur. – velis *ab* vertere in lineas *ab* in rectas et e converso – constare petitur.

constituunt, exire indefinitae quantitatis, quae sint *od* et *oe*, et aliam fac transire de medio anguli, scilicet *of*, et tertiam partem *ab* lineae resolvendae signa in *od* et *oe*; et sit *og* ut tertia *ab*, similiter et *oh*, trahendo *gih*. Et consequenter trahe aequedistantem ad *ih*, aequalem *og*, *oi* et *oh*, et sit *kl* illis aequalis, et describe quadrantem, cuius *kl* corda, quia ille est, cui *ab* aequatur.
Et si in alium arcum resolvere volueris, qui fuerit minor quadrante, eodem modo facito. Si maior, recipito partem aliquotam. Puta vis in circulum reducere, recipito quartam partem rectae, et resolve in quadrantem, et totum in circulum reduxisti.

Obwohl der Anfang dieses Textes nicht mehr gelesen werden kann und sich bei der Bezeichnung der Punkte Irrtümer eingeschlichen haben müssen, ist doch erkennbar, was gemeint ist. Beim Übergang zur endgültigen Fassung hat Nikolaus umgestellt, gekürzt und einen interessanten Zusatz beigefügt:

> Si vero datam rectam in arcum dati circuli resolvere volueris vel cum tota vel parte aliquota eius, procede modo quo supra, angulum inter *od* et *oe* variando, quousque attingas cordam, quae *og*, *oi* et *oh* aequetur.

Er ist die Ausgangsbedingung für zwei weitere Texte:

b) *Lückenhafter Text* fol. 140^{r}, 22–25:

> Cum . . . angulos semirectos . . . circa centrum, qui se habent ut datae lineae proportionales, et unam lineam, quae se habet ad aliam ut costa ad diametrum quadrati, cum *ab* in arcum dati circuli vertis et trahis a centro lineas ad fines arcuum, erit habitudo angulorum sicud erat linearum.

Von Winkeln, die sich wie gegebene Strecken verhalten, ist schon in den *De geometricis transmutationibus*[63] und in den *De mathematicis complementis*[64] die Rede, und ebenso in der *Aurea propositio in mathematicis* (CMH, 181):

> Constat etiam, quod anguli dari possunt, qui se habeant ut costa et diameter quadrati et universaliter sicut dabiles lineae . . .

---

[63] CP II, fol. 45^{v} = CMH, 23.
[64] CP II, fol. 68^{r} = CMH, 92.

In *De mathematica perfectione* lesen wir darüber (CP II, 106^v = CMH, 173):

Angulos, qui se habent ut datae lineae, assignare.

Hoc fit in resolvendo lineas in arcus eiusdem circuli et a centro sectores ad fines talium arcuum trahendo.

In der endgültigen Fassung fehlt der Hinweis auf das irrationale Streckenverhältnis zwischen Seite und Diagonale eines Quadrats (d. h. $1 : \sqrt{2}$); an den anderen Stellen wird es erwähnt.

c) *Fragment* fol. 140^r, 26–27:

. . . circuli pariter vertas in rectam et . . . dati circuli - circuli arcui alterius.

Dazu lesen wir in *De mathematica perfectione* (CP II, 106^v = CMH, 173):

Datum arcum unius circuli in arcum alterius circuli resolvere.

Hoc fit resolvendo ipsum primo in rectam, deinde rectam in arcum alterius modo praemisso.

Mit dem *modus praemissus* ist das im Zusatz zu a) Gesagte gemeint.

21. *Verwandlung eines Sektors in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck* (fol. 140^r, 28–38):

*A*dhuc volo portionem circuli vel circularem vertere in orthogonium, respectu ad quem in maximo circulo orthogonius et portio seu circulus coincidunt, si *ae* aequatur *ad*, quia recta et arcus aequantur. Unde video, si duo latera orthogonii, quae constituunt angulum rectum, aequantur circumferentiae, et arcui portiones erunt superficies aequales in circulo. Et sic tales sicud in maximo sunt coincidentes; et coincidentia, quae videtur in maximo circulo, videtur etiam in minimo orthogonio in quolibet circulo, et igitur, quia orthogonius, cuius latus est semidiameter circuli, . . . – . . . faciens triangulum rectum aequale circumferentiae, tertium est aequale superficiei cum circulo, ita de portionibus proportionaliter ducito; resolvatur omnis orthogonius in quadrangulum aut quadratum aut aliam polygoniam per ea, quae mathematicis nota sunt. Et ita habes artem superficiem circularem per minimum quadrandi vel triangulandi vel aliter figurandi.

4-5: circumferentiae *aus* cordae *durch Darüberschreiben von Nikolaus verbessert; statt* et *irrtümlich* se *Ms.*

Dieses Thema erscheint in *De mathematica perfectione* völlig umgeformt (CP II, fol. 112^r = CMH, 175/76):

Propositio

Si ponitur secundum latus orthogonii semidiameter circuli, et tertium linea contingens circulum vel e converso, et descriptus fuerit circulus, quae erit habitudo contingentis ad arcum, qui cadit intra orthogonium, illa est rectae atque curvae superficierum.

Ut si orthogonium fuerit *abc* et *bc* contingens et *ab* semidiameter circulo descripto, cuius *bd* portio cadit intra orthogonium, quae est *bc* ad *bd*, illa *abc* rectae superficiei ad *abd* curvam superficiem. Probatio huius est: quia cum sic sit in minimo, si dari posset, igitur et in omnibus, cum non referat, utrum orthogonius sit maximus vel non.

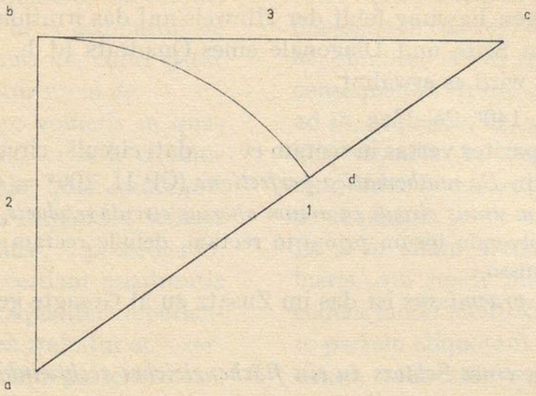


Fig. 24: Zur Verwandlung eines Kreissektors in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck

22. *Kurvenprobleme*

a) *Einleitung* fol. 140v, 1:

*N*unc dissertior media praemissa habundantia multa circa exercitationem . . . subiiciam:

Nun folgt die Aufzählung, die jedoch nur auf kümmerliche Fragmente gestützt werden kann; einige der nachfolgenden Beispiele sind, wie sich aus kennzeichnenden Wendungen erkennen läßt, wörtlich in *De mathematica perfectione* übergegangen, andere sind hingegen wegen zu geringen Materials nicht identifizierbar. Um uns im folgenden bei den Erläuterungen kurz ausdrücken zu können, wollen wir die kennzeichnende Näherung als Gleichung in Symbolen so fassen:

$$(22{,}1)\quad \frac{B}{S} = \frac{3R}{3R-P}$$

Hier bedeutet B den Bogen, S die Sehne, R den Kreisradius und P den Pfeil, d. h. die Differenz zwischen dem Radius und dem Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne.

b) *Fragment* fol. 140v, 2:

. . . minores cum tripla . . .

Mutmaßliche endgültige Fassung CP II, 106v = CMH, 174:

Si tres semidiametri minus sagitta erunt triplae ad cordam, erit arcus ut semidiameter.

Gemeint ist folgendes: Wenn $3R-P=3S$, dann $B=R$.

c) *Fragment* Z. 3–4:

Si super – arcum sesquialterum . . . semidiametrum lineae in corda circumferentiae circuli divisione . . .

Mutmaßliche endgültige Fassung CP II, 106^v = CMH, 174:

Si erunt duplae ad cordam, arcus se habebit in proportione sesqualtera ad semidiametrum.

D. h. wenn $3R-P=2S$, dann $B:R=3:2$ (damalige Fachbezeichnung für 3:2 ist *sesquialter*).

d) *Fragment* Z. 5–6:

Tres semidiametri sunt medium proportionale inter tres lineas in circulo, quae semidiametris terminantes . . . semicirculi . . .

Endgültige Fassung CP II, 106^v = CMH, 174:

Tres semidiametri sunt medium proportionale inter tres semidiametros minus sagitta et semicirculum.

Der Satz – in dieser Formulierung unrichtig – dürfte aus der Beziehung (22,1) am regelmäßigen Sechseck hervorgegangen sein: $3R \cdot 3S = 3B(3R-P)$. Am Sechseck ist $S=R$; 3B ist der Halbkreisbogen. So läßt sich erklären, was gemeint ist.

e) *Fragment* Z. 7–8:

Si corda quadrantis –semidiameter – habitudinem trium linearum – semidiametrorum – arcus.

Das Fragment läßt sich mit keinem anderen Text aus mathematischen Schriften des Nikolaus identifizieren; sein Inhalt ist nicht feststellbar.

f) *Fragment* Z. 9:

Si arcus

Der Inhalt ist nicht feststellbar.

g) *Fragment* Z. 10–11:

Si tres – tertia terminatae – cordam, sic terminant similiter tres lineae – in corda – aliquotae proportionabiliter.

Endgültige Fassung CP II, 107^r = CMH, 174:

Si tres semidiametri minus sagitta fuerint multiplices ad cordam, sic erunt et tres semidiametri minus sagitta ad cordam medietatis arcus et cuiuslibet partis aliquotae proportionabiliter.

Es handelt sich wohl um einen nicht näher aufklärbaren Fehlschluß.

h) *Fragment* Z. 12–13:

Si – trium linearum – semidiametrorum arcus non erit pars aliquota –.

Der Inhalt ist nicht feststellbar.

i) *Fragment* Z. 14–15:

Tria latera – circuli illius, cuius diameter est tertia pars – lateris sibi oppositi.

Endgültige Fassung CP II, 107^r = CMH, 174:

Tria latera trigoni aequilateri erunt ut circumferentia circuli illius, cuius diameter est tertia pars duorum laterum et lineae rectae de uno latere ad medium lateris sibi oppositi.

Wie sich durch Vergleich der Textspuren mit dem Wortlaut der endgültigen Fassung ergibt, ist die Formulierung der Vorform wörtlich in *De mathematica perfectione* übergegangen. – Wir sehen das Dreieck (Seite S) als 1/6 eines regelmäßigen Sechsecks an (Seite S = R), dessen Umkreis den Durchmesser 2R und den Umfang 6B hat. Die im Text erwähnte Streckensumme ist 3R–P. Wegen (22,1) haben wir $6B : 2R = 3R : (3R - P)/3$; also ist $(3R - P)/3$ wirklich der Durchmesser des Kreises mit dem Umfang 3R = 3S. Es handelt sich um eine Variante der Überlegung im Fragment d.

k) *Fragment* Z. 16–21:

Si – diameter – tertia minoris arcus. – cordae – quod – aequalis – semidiameter circuli inscripti.

Endgültige Fassung CP II, 107^r = CMH, 175:

Diameter circuli est aequalis duabus tertiis laterum trigoni isoperimetri et semidiametro circuli eidam trigono inscripti.

Variante in *De caesarea circuli quadratura* CMH, 158:

Palam diametrum dati circuli valere semidiametrum circuli inscripti trigono isoperimetro et $^2/_3$ lateris trigoni isoperimetri.

Wir fassen das Dreieck (Seite R) wiederum als 1/6 eines regelmäßigen Sechsecks auf. Sein Inkreishalbmesser ist also $(R - P)/3$. Wird er um $2R/3$ vermehrt, dann entsteht $(3R - P)/3$. Wir haben also eine Variante des zum Fragment *i* gehörenden Textes vor uns.

l) *Fragment* Z. 22–23:

Corda – et semidiametri et costae –.

Der Inhalt ist nicht feststellbar.

m) *Fragment* Z. 24–25:

– duas cordas quadrantis – .

Endgültige Fassung CP II, 107^r = CMH, 175:

Excessus semicirculi super duas cordas quadrantis est ut excessus diametri quadrati aequalis tertiae parti eius super suam costam.

Auch dieser Text der Vorform ist wörtlich in die endgültige Fassung übergegangen, wie sich aus der Übereinstimmung mit den ursprünglich unlesbaren Textresten ergibt. – Wir gehen aus vom Viertelkreisbogen B, haben also den Halbkreisbogen 2B. Ist S die Seite des einbeschriebenen Quadrats, dann ist der erste Überschuß 2(B–S). Die Quadratdiagonale ist 2R, ihr Überschuß über die Seite also $2R–S = 2(R–S/2)$. Die gemeinte, jedoch nicht hinreichend deutlich beschriebene Verhältnisgleichung ist $2(B–S) : 2B/3 = 2P : 2R$, eine unmittelbare Folge aus (22,1). Die Figur haben wir ergänzt.

23. *Explanationen*: *um die Archimedische Spiralen-Abhandlung*

a) *Fragment* fol. 140^v, 26–30:

In diesem nur sehr lückenhaft entzifferbaren Text findet sich die Stelle . . . *superficiebus, chilindris et speris*. Es handelt sich also wohl um allgemeine

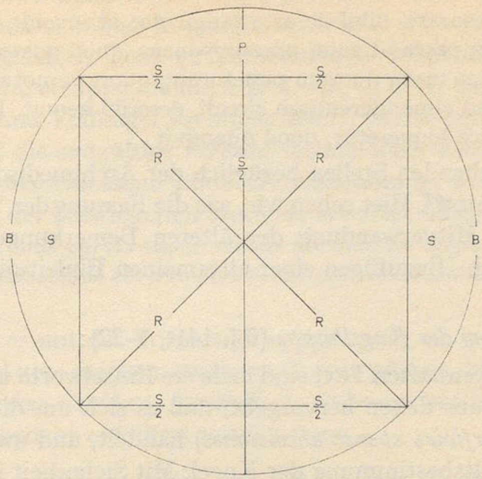


Fig. 25: Eine Beziehung zwischen Quadrat und Umkreis

Bemerkungen über krumme Oberflächen. Andeutungen über Einschlägiges finden sich in *De geometricis transmutationibus*[65] und im zweiten Buch *De mathematicis complementis*[66]. Auf die hier berührte Bestimmung der Kugelkappe geht Nikolaus im nächsten Abschnitt näher ein.

b) *Fragment* Z. 31–37:

> . . . habenti Archimedis, qui – frustra ex elica seu spirali linea inquisivit – in portione elicae, praesupponens quod inquisivit, cum elica describi nequit nisi in habitudine motuum duorum punctorum, qui motus se habent ut semidiameter ad circumferentiam; tamen ad utilitatem artis praescriptae non legitur ipsum – reperiri – apparasse – et studio circa circuli quadraturam frustra – quoniam in scientiam curvi et recti, quam ratio altior et sola mens – intellectualiter intuetur in minimo orthogonio – ex – in maximo et mediis orthogoniis hiis, quae complicantur – in minimo.

Endgültige Fassung CP II, 102^{r} = CMH, 169/70:

> Multa hic propalantur abscondita, quoniam vides, quomodo id, quod verificatur de maximo et minimo, verificatur de mediis, et quod ille, qui videt maximum coincidere cum minimo, quoniam maximum pariter et minimum, ille in ipso videt omnia. Et praxin habes venandi scientiam commensurationis contrariorum, quae incommensurabilia videntur. Haec mihi magna et prius intacta

---

65 CP II, fol. 48^{v} = CMH, 27: Verwendung der Kugeloberfläche bei der raumgleichen Umwandlung einer Kugel in eine Pyramide.

66 CP II, fol. 71^{r} = CMH, 95–96: Mantelflächen von Zylindern und Kegeln. CP II, fol. 72^{r} = CMH, 99–102: Mantelflächen von Kegeln und Zylindern, Kugeloberfläche. CP II, fol. 77^{v} = CMH, 108–10: Mantelflächen von Kegeln und Zylindern; Teile der Kugeloberfläche (= Kugelkappen).

videntur. Archimedes etenim, qui per elicam voluit rectam circumferentiae circuli commensurare, nihil de arte tetigit nec id invenit in dicto particulari, quod quaesivit; peccavit enim praesupponens, quod quaesivit. Elica enim sive spiralis linea sine motu duorum punctorum, quorum motuum habitudo est ut semidiameter ad circumferentiam circuli, describi nequit. Id igitur praesupponit, dum de elica loqueretur, quod quaesivit . . .

Über die vorausgehenden Stellen bezüglich der Archimedischen Spirale wurde bereits oben berichtet[67]. Hier sehen wir, wie die Fassung der Vorform, zustandegekommen unter Mitverwendung der älteren Bemerkungen, mit ähnlichem Wortbestand durch Hinzufügen einer allgemeinen Einleitung erweitert ist.

24. *Zur Bestimmung der Kugelkappe* (fol. 141r, 1–22):

In diesem sehr lückenhaften Text sind mehrere Einzelworte und ganze Wendungen zu erkennen, aus denen hervorgeht, daß es sich um die Bestimmung der Kugelkappe (*superficiei sperae abscisiones*) handelt, und zwar im Zusammenhang mit der Inhaltsbestimmung der Kugel. Mit Sicherheit ist zu lesen: *corpus spere*. Nikolaus folgt also dem Vorgehen von Archimedes[68], der die Kugelkappe wie folgt bestimmt hatte: Ist R der Halbmesser der Kugel, P der Pfeil des die Kappe tragenden Segments und H der Halbmesser des Kreises S, der das Segment abschließt, dann ist $K:S = (R^2 + H^2):H^2$. Eine Anspielung auf das Auftreten der zweiten Potenzen (damaliges Fachwort: *potentia*) könnte aus der Wendung: *sunt enim eiusdem potentiae* entnommen werden. Eine natürlich nur in Worten zu erwartende Formulierung findet sich leider im Entzifferbaren nicht vor. Nikolaus bestimmt aufgrund dieser Beziehung zunächst die Halbkugelkappe, dann die ganze Kugeloberfläche: *sic et superficies etiam* (?) *erit dupla ad – et tota superficies erit quadrupla ad rectam superficiem maioris circuli –. Habes ex hiis pertinentia ad scientiam vertendi superficiem speralem in circularem et in rectilinealem semisuperficiem –*. Ausgangspunkt für Nikolaus ist die Bezugnahme auf *minimam sperae abscisionem*, von der er *mentaliter* zum *maximum* übergeht und nun sicher ist, daß die von ihm gewünschte Beziehung *et in omnibus mediis* in Geltung ist.

Endgültige Fassung: CP II, 112r = CMH, 177:

Abscisionum sperae habitudo curvae superficiei ad rectam basis est ut linea de Zenith ad centrum basis cum semidiametro basis ad ipsam semidiametrum.

Patet, quia in minima abscisione, ubi recta superficies coincidit cum curva et Zenith cum centro, ita est; ideo in omnibus.

Curva superficies medietatis sperae est dupla ad rectam circuli basis.

Datam curvam sperae superficiem in rectam resolvere, circularem et rectilinealem.

[67] Vergleiche die in den Fußnoten 22 und 27 wiedergegebenen Texte.

[68] Es handelt sich um die Sätze 42–43 aus dem ersten Buch *De sphaera et cylindro*.

Anschließend lesen wir noch[69]:

Speram in cubum et cubum in speram resolvere.

Die aus dem endgültigen Text zu entnehmende unzutreffende Formel zur Bestimmung der Kugelkappe, nämlich $K:S=(R+H):H$, die nur zufällig auch für die Halbkugel und Vollkugel Richtiges liefert, dürfte auf einer Flüchtigkeit beruhen. Denn daß die endgültige Fassung in ziemlicher Eile niedergeschrieben wurde, zeigt das angeschlossene Ende der Abhandlung, worin der Leser eine Zusammenfassung der entwickelten Methode erwartet hätte:

Simili modo in aliis curvis superficiebus ad minima respiciendo habitudinem elice. Et quidquid scibile est humanitus in mathematicis, mea sententia hac via reperietur.

Ganz anders steht es mit der Vorform; hier haben wir ein langes Schlußkapitel vor uns, das sowohl vom mathematischen wie vom philosophischen Standpunkt aus höchstes Interesse verdient. Deshalb ist es besonders bedauerlich, daß es nicht in vollem Wortlaut entziffert werden kann.

25. *Über die verwendete Methode* (fol. 141^r, 23–43, 141^v, 1–24):

– sic – exempla, ut darem studiosis occasionem meditandi . . . ideo scientia rei elicitur, ut visione intellectuali, quae se ad minimum et maximum eliciat, ut quae videt complicationem in minimo et maximo seu principio, sciat esse in scriptibili explicatione et – oppositione coincidentia videtur complicatione scibilium uti in hac mathematica, ubi in minimo orthogonio videtur arcus cordae et contingentiae coincidere. – scientia scibili circa aequationem – et minimae quantitatis. Nam sicud videt intellectualiter in omnibus – sic semper necesse est. Et – *dann nach größerer Lücke*: Nam aequalitas illa quantitatis – essendi ex coincidentia oppositorum ante omnem positionem et ablationem visione intuetur. Contemplanti haec consideratio – visione intellectuali esse – intellegit, qui – mentali visu visibilis erit, et – visionem, quoniam deus omnia loqui iudicat – solum enim qui accipit, sit ipsam – visio intellectualis veritas – et

Aus dem weiteren Text ist nichts mehr im Zusammenhang zu entnehmen.

Das Explicit:

⟨Nicolaus⟩ cardinalis ad s. Petrum episcopus brixinensis.

Die Entzifferung dieses Abschnittes ist größtenteils von Herrn Haubst durchgeführt worden, dem wir für diese Mithilfe unseren besonderen Dank schulden. Insbesondere hat er aufgeklärt, daß das *ante omnem positionem et ablationem* Lesefrucht aus Pseudo-Dionysius Areopagita ist[70] und von Nikolaus auch an anderen Stellen verwendet wird[71].

---

[69] Das nämliche Problem wird auch berührt in *De geometricis transmutationibus*: CP II, fol. 48^r = CMH, 25.

[70] *De myst. theol*, Kap. 5 (PG 3, 1048 B): ὑπὲρ πᾶσαν θέσιν ἐστὶν καὶ ὑπὲρ πᾶσαν ἀφαίρεσιν. Die mittelalterlichen Übersetzungen (Dionysiaca I,601) geben das mit "*super* omnem positionem et *super* omnem ablationem" wieder.

[71] *De doct. ign.* I, 34 (h I, S. 11 Z. 3) sagt auch NvK: *super* (omnem affirmationem et

26. *Zusammenfassung*

In der Einführung haben wir versucht, das mathematische Hauptergebnis des Nikolaus, nämlich die kennzeichnende Näherung, nach Entwicklung, Ausformung und Bedeutung zu kennzeichnen. Nun, da wir trotz der vorhandenen Lücken einen Überblick über den Inhalt der Vorform vor uns haben, soll kurz dargelegt werden, wie sich die beiden Fassungen unserer Ansicht nach zu einander verhalten. Wir sehen in der Vorform die bedeutendere Leistung. Gewiß, die Darstellung ist nicht so glücklich wie in der endgültigen Fassung – wir denken etwa an die umständlicheren Formulierungen, die wegen der absichtlichen Vermeidung des Fachwortes *sagitta* nötig waren –; auch die Gliederung befriedigt nicht immer. Diese Unzulänglichkeiten sind wohl die Folge der sich steigernden und an den Nerven zerrenden Mißhelligkeiten während der letzten Wochen in Südtirol. Andererseits ist die Vorform durch das Schlußkapitel weit besser abgerundet als die endgültige Fassung. Diese ist ja in großer Eile niedergeschrieben und läßt gegen Ende eine gewisse Ermüdung des Verfassers nicht verkennen.

Daß die beiden Fassungen gedanklich völlig übereinstimmen würden, war bei der schriftstellerischen Eigenart des Nikolaus auf keinen Fall zu erwarten. In der Tat sind die Bemerkungen über den Kontingenzwinkel (Abschnitt 12) weggeblieben; andererseits erscheinen in der endgültigen Fassung zusätzliche Versuche[72] zur Begründung der kennzeichnenden Näherung. Auch der in Abschnitt 20a wiedergegebene Absatz über das Aufpassen einer Strecke auf den Umfang eines Kreises mit gegebenem Halbmesser dürfte in der Vorform gefehlt haben. Nikolaus ist hier nur durch einen Meßversuch zum Ziel gekommen. Erst die in Abschnitt 9 (Figur 9) wiedergegebene Huygenssche Interpretation der kennzeichnenden Gleichung erlaubt ja eine einfache geometrische Konstruktion.

Wörtliche Übereinstimmungen finden wir nur bei zwei der von Nikolaus gegebenen Anwendungsbeispiele[73], sonst höchstens bei einzelnen Wendungen. Nikolaus erweist sich ja im fortwährenden Suchen nach neuen Ausdrucksmöglichkeiten als eine auch im Sprachlichen sehr selbständige Persönlichkeit. Übrigens

---

negationem), *De sapientia* II (h V, S. 29): *supra* omnem positionem at ablationem, *De non aliud*, Kap. 9 (h XI/1, S. 8, Z. 9): *ante* omnem positionem atque ablationem. An zahlreichen anderen Stellen kehrt derselbe *Gedanke* in freier Formulierung wieder, z. B. *De coni.* I, 5 (h III, N.21) dort heißt es: *primum . . . praeit.*

[72] Wir meinen hier die mathematisch nicht weiter interessanten Ansätze in CP II, fol. 101^v–102^r = CMH, 165–66 + 247, Anmerkungen 10–11. Es handelt sich um zwei erst nach Abschluß der endgültigen Fassung eingeschobene Hilfsbetrachtungen, die Nikolaus bei der Revision des Textes in Cod. Cus. 219, fol. 95^v hat hinzufügen lassen.

[73] Vgl. Abschnitt 2 Vgl. i und l.

lassen die Anwendungsbeispiele deutlich erkennen, wie sehr er darauf bedacht war, den Leser von der Wirksamkeit seines Vorgehens zu überzeugen. Freilich sind die von ihm durchgeführten oder wenigstens angedeuteten numerischen Rechnungen sehr summarisch und befriedigen nicht recht. Ob Nikolaus übrigens die Übereinstimmung seiner in Vorform und endgültiger Fassung wiedergegebenen Regel mit den früheren Ansätzen erkannt hat, steht dahin; er selbst hat, soweit wir bis heute wissen, nichts darüber gesagt.

27. *Zur mathematisierenden Methode*

Von besonderem Interesse sind die zusammenfassenden Ausführungen des Abschnitts 25 über die anzuwendende *Methode*. Sie treten als Ergänzung neben die schon in *De docta ignorantia* und in vielen anderen Schriften gegebenen Hinweise. Nikolaus ist davon überzeugt, daß seine Bemerkungen *allgemeinen Charakter* haben; sie beziehen sich jedoch in Wirklichkeit nur auf *Einzelfragen*, die sich mit seinen mathematischen Überlegungen in innere Beziehung setzen lassen. Der Gedanke, aus übereinstimmenden Eigenschaften im Minimum und Maximum auf gemeinsame Beziehungen auch im Zwischenbereich zu schließen, ist noch unvollkommen, jedoch historisch von hohem Interesse. Sein erstes Auftreten fällt in eine Zeit, da Nikolaus noch nichts Näheres von Archimedes wußte, auch von der *Circuli dimensio* nur dem Hörensagen nach. Was in *De docta ignorantia* nur vage angedeutet ist, wird erst in dem Augenblick präzisiert, da sich Nikolaus eingehender mit Mathematik befaßt und den Versuch macht, seine Grundvorstellungen auf das Problem der Kreisquadratur anzuwenden. Unzweifelhaft kam der entscheidende Anstoß von der Isoperimeter-Abhandlung her. Sie kann ja in gewissem Sinn als Erweiterung der *Circuli dimensio* gelten, und es ist nicht unwahrscheinlich, daß ihr Grundgedanke schon in einer größeren Archimedischen Abhandlung über den Kreis enthalten war, von der heute nur mehr Bruchstücke erhalten sind – die *Circuli dimensio* ist nur eines dieser Fragmente.

Jene gemeinsame Eigenschaft der *media* zwischen *minimum* und *maximum*, die sich in Verbindung mit dem Fortschreiten innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen bringen läßt[74], würden wir heute als das Bildungsgesetz einer Zahlenfolge ansehen, deren Glieder monoton vom Kleinstwert bis zum Größtwert zunehmen. Nikolaus weiß – das Beispiel der regelmäßigen Vielecke am Kreis hat ihn dazu geführt –, daß es dabei Fälle gibt, bei denen $n \rightarrow \infty$ zu einem *endlichen* Grenzwert gehört, und daß dieser Grenzwert nicht unter den Gliedern der Folge auftritt. Ausgangspunkt war hierbei die schon zu seiner Zeit hundertmal wiederholte Bemerkung, daß sich der Kreis zwar durch Vermehrung der Eckenzahl regelmäßiger Vielecke beliebig annähern lasse, daß er aber existentiell eben kein „Unendlichvieleck" ist. Das Neuartige in seiner Betrachtungsweise ist, daß in seinem Sinne der Grenzübergang vermittels der *visio intellectualis* in „geistiger

[74] Vgl. das in Abschnitt 2 Gesagte.

Wesensschau" wirklich „sichtbar" gemacht werden kann. Was hier auf außermathematischem Wege der Vorstellungskraft und dem inneren Feingefühl überlassen bleibt, wird in jahrhundertelangem Ringen um den Gegenstand zur Infinitesimalmethode der modernen Mathematik.

Daß freilich eine im Grenzwert festgestellte Eigenschaft zur Kennzeichnung des Bildungsgesetzes der Zahlenfolge hinreichen könne, ist eine Täuschung. Dieser Irrtum wiegt schwer und rückt das eingeschlagene Verfahren in heutiger Sicht nahe ans Dilettantische. Für den Wissenschaftshistoriker freilich kommt es bei Pionierleistungen in erster Linie nicht auf richtig oder falsch an, sondern auf die Entwicklungsmöglichkeit, die sich in einem Gedanken vorfindet. Der Irrtum des Nikolaus ist ein *nebensächliches* Ausgleiten und nimmt dem Hauptgedanken nichts von seiner Wirksamkeit.

Dazu kommt, daß die mathematischen Überlegungen des Nikolaus nur unter Berücksichtigung dessen richtig gewürdigt werden können, was er selbst von anderen auf mathematischem Gebiet hat entnehmen können und was wir bei den zeitgenössischen Fachleuten vorfinden. Deren Beiträge zur Mathematik beschränken sich größtenteils auf die schulmäßige Wiederholung überkommenen Lehrgutes und enthalten wenig Neuartiges. Die interessanten Vorstellungen der Spätscholastiker – ich erwähne etwa die wichtigen Beiträge des Thomas Bradwardine und des Nicole Oresme, die erst in den letzten Jahrzehnten erneut Gegenstand gründlicher Untersuchungen geworden sind – waren Nikolaus bis auf Bradwardines *Geometria speculativa* unbekannt geblieben; sie hätten bestimmt auf ihn großen Eindruck gemacht. Wie Nikolaus gerechnet hat, wissen wir nicht. Numerische Ergebnisse erscheinen zumeist in verbaler Form, nur gelegentlich auch in Ziffern. Algebraische Symbole treten nicht auf; wo wir ein Quadratwurzelzeichen erwarten könnten, wird das Wort *radix* verwendet. Hingegen ist sicher, daß Nikolaus die einfacheren Teile der Euklidischen *Elemente* in der Version des Adelhard von Bath und Joh. Campanus kannte. Inwieweit er von den damals umlaufenden Beiträgen zur praktischen Geometrie wußte, ist noch ungeklärt. Wir sehen also, daß sich Nikolaus mit seinen aus philosophischen Spekulationen hervorgegangenen mathematischen Überlegungen subjektiv auf Neuland befand, und daß sich diese weit von dem damals Üblichen entfernten. Diese Überlegungen weisen ihn auch auf mathematischem Gebiet als bedeutenden Anreger und Neuschöpfer aus – als eine Persönlichkeit übrigens, die bei der weiten Verbreitung ihrer Schriften zunächst in den Kreisen philosophisch interessierter Theologen, später auch bei einigen Fachmathematikern auf Verständnis stieß und daher – abgesehen von der Übernahme und Weiterentwicklung der kennzeichnenden Näherung – in der Entwicklungsgeschichte des Funktionsbegriffs und infinitesimaler Gedankengänge nicht übergangen werden kann.

Im folgenden wird nicht auf Seitenzahlen verwiesen, sondern auf Numeri (N. 1–27) und Anmerkungen (A. 1–74). Kursive Zahlen verweisen auf Stellen mit eingehenderen Analysen oder mit Wiedergabe von Texten.

I. Mathematische Schriften des Nikolaus von Kues:

De correctione Calendarii (etwa 1436/37): CP II, 22^{r}–29^{r}. Lateinisch-deutsch v. V. STEGEMANN – B. BISCHOFF, Heidelberg 1955 unter d. Titel: *Die Kalenderverbesserung*: A. 52.

De geometricis transmutationibus (Koblenz?, 5. IX. 1445): CP II, 33^{r}–53^{v} = CMH, 3–28 + 189/98: N. *2*, 6, 23; A. 5, 6, 8, 10/11, 13/14, 63, 65, 69.

De arithmeticis complementis (Koblenz?, Herbst 1445): CP II, 54^{r}–58^{v} = CMH, 29–35 + 198/200: N. *3*, 6; A. *15*, 16, *17*.

De circuli quadratura (Rieti, 15. VII. 1450): CMH, 36–57 + 200/07: A. *12*, 14, 53.

Quadratura circuli (Dezember 1450): CN, 5–9 = CMH, 58–67 + 208/13: N. *4*; A. 5, *19*, 20/21, *22*, 60.

De mathematicis complementis, Buch I (Banzoll, Anfang September 1453): CP II, 59^{r}–70^{v} = CMH, 68–92 + 213/21: N. *5*; A. 5, 19, 25, *26/27*, 28/31, 35, 60. Buch II (Brixen, 24. XI. 1454): CP II, 70^{v}–92^{r} = CMH, 92–127 + 221/33: N. 7, 20, 23; A. *37*.

De caesarea circuli quadratura (Andratz, 6. VIII. 1457): CMH, 151–159 + 242/45: N. *7*; A. *18*, *39*.

„*De mathematica perfectione*" (Vorform). (Buchenstein?, Sommer 1459): Cod. Cus. 218, 138^{r}–141^{v}: N. 1, *9/25*, 26.

De mathematica perfectione (Rom, Spätherbst 1458): CP II, 101^{r}–114^{r} = CMH, 160–177 + 245/50: N. 1, *9/11*, *13*, 14/15, 17, *18/24*, 26; A. *41*, 42, 56/59, 61.

Aurea propositio in mathematicis (Rom, 8. VIII. 1459) = CMH, 178–182 + 251/52: N. *8*, *18*, *20*; A. *40*, 62.

Mathematische Schriften, deutsch v. Josepha HOFMANN, mit Einführung und Anmerkungen von J. E. HOFMANN, Hamburg 1952.

Einzelne mathematische Schriften in J. REGIOMONTANUS: *De quadratura circuli dialogus et rationes diversae separatim aliquot libellis exquisitae* (1462), ed. Joh. SCHÖNER, Nürnberg 1533, 5–21 = CN: A. 3.

Sigla:

CMH = *Math. Schr.* mit Einführung und Anmerkungen von J. E. HOFMANN, Hamburg 1952: N. 10/11, 13/15, 17/23; A. *3*, 4–6, 8, 10/17, 19/22, 25/33, 37/42, 53, 56/66, 69, 72.

CN = *Einzelne mathematische Schriften*: A. *3*, 5, 8, 19/22, 32/33, 38, 60.

h = NICOLAI DE CUSA, *Opera omnia*, I (Leipzig 1932): A. *46*, 48/49, 54, 71.–XI, 1 (Leipzig 1940): N 1.–XIII (Leipzig 1944): A. 71.

p = *Opera*, ed. J. LEFÈBRE D'ÉTAPLES (Paris 1514 = 1968): I: N. 1; A. 46, 55. II: N. 10/11, 13/15, 17/24; A. *3*, 5–6, 8, 10/11, 13, 15/17, 19, 25/31, 37, 41/42, 46, 52, 56/61, 63/66, 69, 72.

II. Die sonstigen zitierten Namen und Werke

Adelhard v. Bath (1075?–1160?): N. 27. A. 7.

Archimedes v. Syrakus (287?–212): N. 2–6, 9, 17, 23, 27; A. 12, 17/18, 22/23, 38; *Circuli dimensio*: N. 27; A. 8, 12, 17. Lateinisch aus d. Arabischen v. Gerhard v. Cremona: N. 2–4; A. 18. → M. Clagett (1964): A. *18*. – *De spiralibus*: N. 23; A. 22/23, 27, 36. – *De sphaera et cylindro*: A. 68. – Verschollene Schrift *De circulo*: N. 27.
Opera, lateinisch aus d. Griechischen v. Jakob v. Cremona (1450): N. 5; A. 18,24. In der Revision von Joh. Regiomontan (1464) mitenthalten in der griechisch-lateinischen Erstausgabe ed. Th. Gechauff, Basel 1544: A. 18.

Aristarchos v. Samos (310?–230?): *De magnitudinibus et distantiis solis et lunae*: A. 30.

Bischoff, Bernhard, → Nikolaus v. Kues: *Kalenderverbesserung* (1955): A. 52.

Boethius, Anicius Manlius Torquatus Severinus (480?–524): A. 7. *Geometria*, lateinische Bearbeitung des 11. Jh. der Euklidischen *Elemente* unter Mitverwendung der Schriften lateinischer Feldmesser: A. 7.

Bradwardine, Thomas (1290?–1349): N. 2, 11, 27; A. 51. *Geometria speculativa* (um 1325), ed. P. S. Ciruelo, Paris 1495 u.ö.: N. 27; A. 7, 9, 47.

Campanus, Johannes v. Novara († 1296): → Euklid, *Elemente* (um 1260): N. 27; A. 7.

Cerda, Antonio della († 1459): N. 1.

Ciruelo, Pedro Sanchez (1470?–1560). → Th. Bradwardine (1495): A. 7.

Clagett, Marshall: *Archimedes in the Middle Age* I, Madison 1964: A. *18*.

Euklid v. Alexandria (365?–300?): *Elemente*: N. 12. Arabische Übersetzer u. Bearbeiter u. deren lateinische Übersetzer: A. 7, 51. – Aus d. Arabischen v. Adelhard v. Bath (um 1150), revidiert und ergänzt von Joh. Campanus(um 1260), ed. E. Ratdolt, Venedig 1482 u.ö.: A. 7 N. 27; A. 7. Griechische Erstausgabe ed. S. Grynaeus, Basel 1533: A. 51.

Feldmesser, lateinische (1. Jh. n. Chr.): A. 7.

Gechauff, Thomas (Venatorius) (1488–1551) → Archimedes, *Opera* (1544): A. 18.

Gerhard v. Cremona (1114–1187): → Archimedes, *Circuli dimensio* lateinisch aus d. Arabischen: N. 3; A. 18.

Grynaeus, Simon (1493–1541): → Euklid (1533): A. 51.

Haubst, Rudolf: N. 1, 25.

Hofmann, Josepha: → Nikolaus v. Kues (1952): A. 3.

Hofmann, Joseph Ehrenfried: *Rektifikation und Quadratur des Kreises in der Oberstufe*, in: Der Mathematikunterricht 7, Heft 3 (1961), 72–103: A. 45.
Mutmaßungen über das früheste mathematische Wissen des Nikolaus von Kues: MFCG 5 (1965), 98–136: A. 47, 50, 55. → Nikolaus v. Kues (1952): A. 3.

Hommer, Johann: N. 1.

Huygens, Christiaan (1629–1695): N. 9, 27. *De circuli magnitudine inventa*, Leiden 1654 = *Œuvres* XII, d. Haag 1910, 113–215: A. *43*.

Jakob v. Cremona († 1452) → Archimedes (1544): A. 18.

Lefèbre d'Étaples, Jacques (1455?–1536): → Nikolaus v. Kues (1514–1968): A. 3.

Marx, J.: *Verzeichnis der Handschriften-Sammlung des Hospitals von Cues*, Trier 1905: N. 1; A. *1*, 2.

Nikolaus V. = Tommaso Parentucelli (*1397, Papst 1447/55): N. 4–5.

NIKOLAUS von Kues (1401–1464) passim; Schriften u. Ausgaben eigens.

ORESME, Nicole (1323?–1382): N. 27.

PROKLOS Diadochos (410–485): N. 12. *In primum Euclidis elementorum librum commentarii,* griechisch ed. S. GRYNAEUS zusammen mit EUKLIDS *Elementen,* Basel 1533: A. 51.

PSEUDO-DIONYSIUS AREOPAGITA (Christlicher Neuplatoniker d. 5. Jh.): N. 25; A. 70.

RATDOLT, Erhard (1447–1528): → EUKLID, *Elemente* (1482): A. 7.

REGIOMONTANUS, Johannes (= Müller v. Königsberg in Franken) (1436–1476): *De quadratura circuli dialogus et rationes diversae separatim aliquot libellis exquisitae* (1462) = selbständig paginierter Zusatz zu: *De triangulis omnimodis libri quinque* (1462/64), ed. Joh. SCHÖNER, Nürnberg 1533: A. 3. → ARCHIMEDES, *Opera* (1544): A. 18.

SCHÖNER, Johannes (1477–1547): → J. REGIOMONTANUS (1533): A. 3.

SCHOOTEN, Frans van (1615–1660): → Fr. VIÈTE (1646): A. 34.

SCHWAB, Johann Christian (1743–1821): N. 9. *Éléments de géométrie,* Nancy 1813: A. 44.

SIGISMUND (1427–1496, Herzog v. Tirol 1439/90): N. 7

STEGEMANN, Viktor (1902–1948): → NIKOLAUS v. Kues: *Kalenderverbesserung* (1955): A. 52.

TOSCANELLI, Paolo dal Pozzo (1397–1482): N. 2, 6/7. Brief an NIKOLAUS v. Kues (1453/54): CN, 13–14 = CMH, 128–131 + 233/35: A. *32,* 33.

VASARIUS, Omnisanctus (um 1500): A. 5, 29.

VIÈTE, François (1540–1603): N. *6,* 9; A. 34. *Munimen adversus nova cyclometrica,* Paris 1594 = Opera, ed. Fr. van SCHOOTEN, Leiden 1646 = Hildesheim/New York 1970: A. 34.

WILPERT, Paul (1906–1967): → NIKOLAUS v. Kues: *De venatione sapientiae* (1964): A. 55; → *De docta ignorantia* I, Hamburg 1964: A. 46.

WINDHABER, Franz: N. 1.

ZENODOROS (um 180 v. Chr.): A. 7. *De figuris isoperimetris*: N. 27; A. 7.